

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

GIORDANA GOMES ANDRADE

CORREÇÕES RADIATIVAS DA QED

BRASÍLIA
24 DE JUNHO DE 2020

Giordana Gomes Andrade

Correções Radiativas da QED

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

24 de junho de 2020

Giordana Gomes Andrade

Correções Radiativas da QED/ Giordana Gomes Andrade. – Brasília, 24 de junho de 2020-

77 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Arsen Melikyan

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, 24 de junho de 2020.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Giordana Gomes Andrade

Correções Radiativas da QED

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 24 de junho de 2020:

Arsen Melikyan
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
24 de junho de 2020

Resumo

A Eletrodinâmica quântica (QED) surgiu como a primeira teoria quântica de campos, da tentativa de explicar alguns fenômenos de interação matéria-luz que, até o momento, não eram bem compreendidos sob a ótica do eletromagnetismo clássico ou da mecânica quântica. Com o nascimento da relatividade especial, houve necessidade de incorporá-la às ideias já presentes à época.

Apesar de a eletrodinâmica quântica ser a teoria melhor testada e verificada atualmente, existem alguns pontos inerentes à ela que, a princípio, podem gerar a sensação de que ela é falha. Isso se traduz na existência de diversos infinitos na QED, e analisá-los será o objetivo deste trabalho.

Assim, inicialmente será feita uma revisão das regras de Feynman para a eletrodinâmica quântica, discutindo, além disso, alguns processos comuns na QED. Em seguida, analisaremos o processo de *bremsstrahlung* como forma de introduzir as correções radiativas, adicionalmente avaliando a função vértice do elétron. Concluindo, discutiremos a renormalização da intensidade do campo, a fórmula de redução LSZ e, finalmente, a renormalização da carga elétrica.

Palavras-chaves: eletrodinâmica quântica. correções radiativas. regularização. renormalização.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagramas do espalhamento Compton.	19
Figura 2 – Classe de diagramas	34
Figura 3 – Diagrama de um loop.	37
Figura 4 – Emissão de fóton suave e duro.	45
Figura 5 – Função de quatro pontos exata na teoria de campos escalar.	63
Figura 6 – Diagrama de polarização do vácuo de ordem α	66

Sumário

	Introdução	11
I	INTRODUÇÃO À ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	15
1	REGRAS DE FEYNMAN	17
2	PROCESSOS COMUNS NA QED	19
2.1	Espalhamento Compton	19
2.1.1	Comportamento a Altas Energias	24
II	CORREÇÕES RADIATIVAS	27
3	INTRODUÇÃO ÀS CORREÇÕES RADIATIVAS	29
3.1	Caso clássico	29
3.2	Caso Quântico	33
3.2.1	Diagramas com loop	34
3.2.1.1	Parâmetros de Feynman	37
4	FORMALIZAÇÃO DAS CORREÇÕES RADIATIVAS	51
4.1	Renormalização da Intensidade do Campo	51
4.2	Fórmula de Redução LSZ	58
4.3	Renormalização da Carga Elétrica	65
	Conclusão	75
	REFERÊNCIAS	77

Introdução

A teoria do eletromagnetismo clássico atingiu seu auge em 1864 com as equações de Maxwell, que estabeleceram relações entre os campos elétrico e magnético, a corrente elétrica e a carga elétrica.

Apesar de todo o sucesso da teoria, esta não foi capaz de explicar alguns fenômenos específicos tais como as linhas discretas no espectro atômico ou a radiação de corpo negro em diferentes comprimentos de onda. Porém, Max Planck logo inauguraria as primeiras ideias da mecânica quântica com estudos sobre o corpo negro, abordando o problema sob uma perspectiva diferenciada.

Assim, os átomos começaram a ser tratados como pequenos osciladores cujas energias deveriam assumir valores discretos, absorvendo e emitindo radiação eletromagnética. Com isso, iniciou-se o processo chamado *quantização*, que ampliou os caminhos de interpretação dos fenômenos inexplicados à época.

Dessarte, em 1905 Einstein propôs sua explicação do efeito fotoelétrico, segundo o qual a luz é composta de pacotes de energia individuais denominados *fótons*, os quanta de luz. Essas ideias revolucionaram o pensar sobre a luz habitual, já que implicava o fato de que a radiação eletromagnética, enquanto onda na teoria clássica, também existia na forma de partículas.

Com a introdução do modelo de Bohr, em 1913, que estabelecia que elétrons em átomos poderiam assumir apenas energias discretas, outro exemplo de quantização foi colocado em evidência, explicando com precisão a natureza das linhas espectrais. Onze anos depois, de Broglie apresentou a hipótese da dualidade onda-partícula, de que a luz poderia exibir comportamento corpuscular e de onda dependendo das circunstâncias. Reunindo todas essas ideias, a mecânica quântica foi desenvolvida com contribuições de físicos como Pauli, Dirac e Schroedinger.

Paralelamente, Einstein desenvolvia a teoria da relatividade especial, inaugurada com sua publicação feita também em 1905, e construída a partir do eletromagnetismo de Maxwell. Assim, foi introduzida a transformação de Lorentz, que estabeleceu um parâmetro de avaliação das leis físicas sob referenciais inerciais distintos.

Porém, com todo o progresso trazido pelas teorias mencionadas, ainda existiam fenômenos incompreendidos e inexplicados, como a emissão espontânea, que ocorre quando um elétron diminui sua energia espontaneamente e emite um fóton mesmo sem a ação de um campo eletromagnético externo. De forma geral, a equação de Schroedinger da mecânica quântica não era capaz de descrever o comportamento de fótons e, ainda, era

inconsistente com os princípios da relatividade especial.

Desse modo, a teoria quântica de campos surgiu da tentativa de descrever as interações entre a luz e os elétrons, como resultado de combinações entre teoria de campos clássica, mecânica quântica e relatividade especial. Entre 1925 e 1926, Born, Pascual Jordan e Heisenberg desenvolveram uma teoria quântica do campo eletromagnético livre, retomando a ideia de tratar o campo como um conjunto de osciladores harmônicos quânticos, por meio de quantização canônica. Mesmo apresentando uma perspectiva de descrição interessante, por não considerar interações a teoria estava distante de prever o comportamento do mundo real.

O termo *eletrodinâmica quântica* (QED) foi utilizado primeiramente em 1927, por Dirac, em sua apresentação "*The quantum theory of the emission and absorption of radiation*"[7]. Sua teoria se destacava por incluir um termo adicional de interação entre a densidade de corrente elétrica e o potencial vetor eletromagnético. Assim, o problema de emissão espontânea foi explicado adequadamente, usando teoria de perturbação de primeira ordem.

Dirac argumentou, baseado no princípio da incerteza da mecânica quântica, que osciladores harmônicos quânticos não podem ficar estacionários, tendo uma energia mínima não nula e devendo sempre oscilar, mesmo quando no menor estado de energia. Por conseguinte, sempre há um campo eletromagnético oscilante com energia no ponto zero, até mesmo no vácuo perfeito. Esta denominada flutuação quântica dos campos no vácuo estimulam a emissão espontânea da radiação por elétrons em átomos. Em segunda ordem de teoria de perturbação, a teoria de Dirac pôde explicar, também, outros fenômenos como o espalhamento de fótons e o espalhamento Compton não-relativístico.

Entretanto, quando tudo parecia bem sucedido, cálculos em ordens maiores da teoria de perturbação resultavam em verdadeiras catástrofes, com a presença de diversos infinitos, como foi mostrado por Oppenheimer em 1930. Alguns fenômenos que serão explorados neste trabalho incluem a autoenergia do elétron e a polarização do vácuo.

Em 1947, Willis Lamb e Robert Retherford mediram o chamado *Lamb shift*, a diferença de energia entre os níveis $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ do átomo de hidrogênio. Isso foi possível desprezando a contribuição dos fótons cuja energia excedesse a massa do elétron. Posteriormente, Lamb e outros pesquisadores confirmaram o valor já encontrado usando um método no qual os infinitos se cancelavam. Porém, esse método era deficiente e não podia ser generalizado para outros casos.

A solução mais eficiente surgiu a partir da noção de que os parâmetros "nus", que não possuem significado físico, deveriam ser substituídos por seus valores medidos. Por volta de 1950, Schwinger, Feynman, Dyson e Tomonaga sugeriram que, para eliminar as divergências, termos infinitos deveriam ser adicionados à lagrangeana como forma de

contrabalancear as divergências, [5]. Este procedimento é conhecido como *renormalização*, e será tratado no corpo do texto. Também discutiremos sobre métodos de *regularização*, com os quais removemos infinitos para obter observáveis. Este será o principal objetivo deste trabalho, abordar as correções radiativas da Eletrodinâmica Quântica.

Desse modo, começaremos com uma revisão breve no primeiro capítulo das regras de Feynman para a QED e, em seguida, veremos alguns processos comuns da eletrodinâmica quântica. Posteriormente, introduziremos as ideias iniciais das correções radiativas a partir de um problema de *Bremsstrahlung* suave, e avaliando a função do vértice do elétron. Por fim, discutiremos a renormalização da intensidade do campo, além da fórmula de redução LSZ e, finalmente, o tópico principal, a renormalização da carga elétrica.

Parte I

Introdução à Eletrodinâmica Quântica

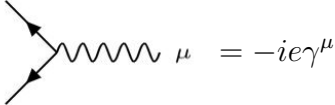
1 Regras de Feynman

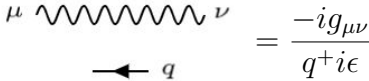
Iniciando a abordagem da Eletrodinâmica Quântica, faremos uma breve revisão das regras de Feynman para a QED.

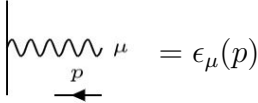
Assim, vamos introduzir a partícula vetorial A_μ e a Hamiltoniana de interação

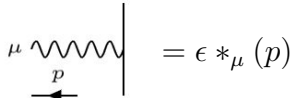
$$H_{\text{int}} = \int d^3x e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (1.1)$$

As principais regras são

Vértice  $= -ie\gamma^\mu$ (1.2)

Propagador do fóton  $= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$ (1.3)

Linhas de fótons externos  $= \epsilon_\mu(p)$ (1.4)

 $= \epsilon *_\mu(p)$

O símbolo $\epsilon_\mu(p)$ representa o vetor de polarização do fóton do estado final ou inicial.

A fim de justificar as regras apresentadas até este ponto, relembremos que no gauge de Lorentz ($\partial^2 A_\mu$) cada componente de A obedece a equação de Klein-Gordon de forma independente, com $m = 0$. Essa equação tem como solução no espaço de momento $\epsilon_\mu(p)e^{-ip \cdot x}$, onde $p^2 = 0$ e $\epsilon_\mu(p)$ é qualquer quadri vetor.

A interpretação de vetor de polarização tem origem no eletromagnetismo clássico. Se escrevemos o campo eletromagnético quantizado e o expandimos em termos de soluções clássicas da equação de onda, obtemos

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=0}^3 (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon^{*r}_\mu(p) e^{ip \cdot x}), \quad (1.5)$$

onde $r = 0, 1, 2, 3$ indexa a base dos vetores de polarização. Dessa expansão, decorrem os fatores das linhas externas das regras de Feynman. Destacamos que os fótons dos estados

final e inicial sempre devem ser polarizados transversalmente; seus vetores de polarização sempre são do tipo $\epsilon^\mu = (0, \epsilon)$, onde $\mathbf{p} \cdot \epsilon = 0$.

Analisando a Hamiltoniana de interação, também podemos justificar o fator do vértice da QED. A matriz γ na amplitude da QED fica entre espinores ou outras matrizes γ , com os índices de Dirac contraídos ao longo das linhas fermiônicas.

Já no caso do propagador do fóton, podemos pensá-lo analogamente ao propagador sem massa de Klein-Gordon, já que o campo eletromagnético no calibre de Lorent satisfaz a equação de Klein-Gordon sem massa. Como a invariância de Lorentz requer que o propagador do fóton seja um tensor de rank-2 isotrópico que pode unir γ^μ e γ^ν dos vértices de cada extremidade, há a presença do fator $-g_{\mu\nu}$. Para entender o sinal do propagador, analisamos a transformada de Fourier

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{q}|} e^{-iq \cdot (x-y)} \cdot (-g_{\mu\nu}), \quad (1.6)$$

que é igual a $\langle 0 | T[A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle$. Se definimos $\mu = \nu$ e tomarmos o limite $x^0 \rightarrow y^0$, essa quantidade se torna a norma do estado $A_\mu(x) | 0 \rangle$, que deveria ser positiva. Assim, o sinal escolhido garante que os três estados criados por A_i têm norma positiva. Esses estados contêm todos os fótons reais; porém, como $g_{\mu\nu}$ não é positivo definido, os estados criados por A_0 possuem norma negativa. Felizmente, esses estados nunca são produzidos em processos físicos.

2 Processos comuns na QED

2.1 Espalhamento Compton

Nesta seção, vamos considerar o processo $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$, denominado *espalhamento Compton*. Assim, computaremos a seção de choque não polarizada para essa reação, até a menor ordem em α . Este processo envolve os seguintes diagramas,

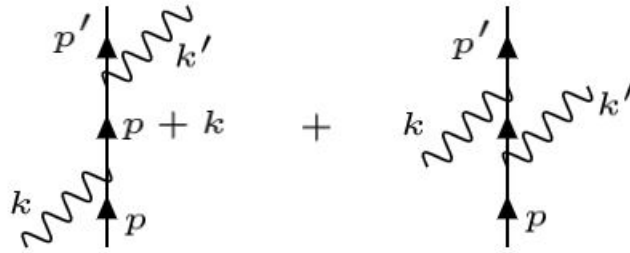


Figura 1 – Diagramas do espalhamento Compton.

Segundo as regras de Feynman, se $\epsilon_\nu(k)$ e $\epsilon_\mu(k')$ são os vetores de polarização dos fótons final e inicial, temos

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\epsilon_{*\mu}(k')\frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2}(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k)u(p) \\
 &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k)\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}(-ie\gamma^\mu)\epsilon_{*\mu}(k')u(p) \\
 &= -ie^2\epsilon_{*\mu}(k')\epsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2}\right]u(p).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $p^2 = m^2$ e $k^2 = 0$, os denominadores são

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k \text{ e } (p-k')^2 - m^2 = -2p \cdot k'. \tag{2.2}$$

Em relação aos numeradores, podemos simplificá-los utilizando álgebra de Dirac,

$$\begin{aligned}
 (\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\nu m)u(p) \\
 &= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu (\not{p} - m)u(p) \\
 &= 2p^\nu u(p).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Unindo numeradores e denominadores simplificados, temos

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_{*\mu}(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p \cdot k'} \right] u(p). \quad (2.4)$$

Agora, devemos elevar (2.4) ao quadrado e somar sobre os estados de polarização do elétron e do fóton. A soma sobre as polarizações do elétron pode ser feita através da identidade $\sum u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m$. Para os fótons, devemos fazer a substituição

$$\sum_{\text{polarizações}} \epsilon_{*\mu} \epsilon_\nu \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Essa relação pode ser derivada se considerarmos, por exemplo, um processo da QED arbitrário envolvendo um fóton externo com momento k ($i\mathcal{M}(k) \equiv i\mathcal{M}^\mu(k) \epsilon_{*\mu}(k)$). A seção de choque é proporcional a

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon_{*\mu}(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 - \sum_{\epsilon} \epsilon_{*\mu} \epsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \quad (2.6)$$

Por conveniência, escolhemos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, de forma que os vetores de polarização transversais são

$$\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0); \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0). \quad (2.7)$$

Essas definições implicam

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon_{*\mu}(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2. \quad (2.8)$$

Sabe-se que fótons externos são criados pelo termo de interação $\int d^4x e j^\mu A_\mu$, no qual $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ é a corrente vetorial de Dirac. Dessa forma, esperamos que $\mathcal{M}^\mu(k)$ seja dado por um elemento de matriz do campo de Heisenberg j^μ [1],

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle, \quad (2.9)$$

onde os estados inicial e final incluem todas as partículas, exceto os fótons comentados.

Como a corrente j^μ é conservada classicamente, esperamos que isso também seja válido na teoria quântica, então, de (2.9), obtemos,

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0, \quad (2.10)$$

que, em palavras, afirma que a amplitude se anula quando o vetor de polarização é substituído por k_μ ¹.

¹ Essa relação é conhecida por *identidade de Ward*.

Assim, devemos checar se (2.4) obedece essa relação. Para tanto, faremos a troca de $\epsilon_\nu(k)$ por k_ν e de $\epsilon^*_\mu(k')$ por k'_μ , além de manipular os produtos da matriz de Dirac. Em ambos os casos os termos dos dois diagramas se cancelam.

Retomando a fórmula da soma das polarizações, para $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, (2.10) assume a forma

$$k\mathcal{M}^0(k) - k\mathcal{M}^3(k) = 0. \quad (2.11)$$

Dessa maneira, concluimos que $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$, e

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon} \epsilon^*_\mu \epsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k) &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 \\ &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim, de fato podemos somar sobre polarizações de fótons externos pela substituição mencionada.

É interessante destacar que, com esse procedimento, vemos que fótons não físicos tipo tempo e fótons longitudinais podem ser omitidos dos cálculos da eletrodinâmica quântica, já que em qualquer evento as amplitudes elevadas ao quadrado se cancelam, gerando probabilidade nula para esses estados.

Agora, precisamos computar a média da amplitude quadrada sobre as polarizações iniciais do elétron e do fóton, e somá-la sobre as polarizações finais. Encontramos, a partir de (2.4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \cdot \text{tr} \left\{ (\not{p} + m) \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] \right\} \\ &\cdot (\not{p} + m) \left[\frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p \cdot k'} \right] \\ &\equiv \frac{e^4}{4} \left[\frac{\text{I}}{(2p \cdot k)^2} + \frac{\text{II}}{(2p \cdot k)(2p \cdot k')} + \frac{\text{III}}{(2p \cdot k')(2p \cdot k)} + \frac{\text{IV}}{(2p \cdot k')^2} \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde I, II, III e IV são traços, tais que I e IV são iguais sob a troca $k \rightarrow -k'$ e II = III. Assim, vamos desenvolver apenas I e II.

O primeiro termo é

$$\text{I} = \text{tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu)]. \quad (2.14)$$

Como metade dos termos dentro do traço contém um número ímpar de matrizes

gama, esses se anulam, bastando calcular os oito termos restantes. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\not{p}'\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu \not{p}\gamma_\nu \not{k}\gamma_\mu] &= \text{tr}[(-2\not{p}')\not{k}(-2\not{p})\not{k}] \\
 &= \text{tr}[4\not{p}'\not{k}(2p \cdot k - \not{k}\not{p})] \\
 &= 8p \cdot k \text{tr}[\not{p}'\not{k}] \\
 &= 32(p \cdot k)(p' \cdot k).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Unindo todos os resultados, I se reduz a

$$I = 16(4m^4 - 2m^2 p \cdot p' + 4m^2 p \cdot k - 2m^2 p' \cdot k + 2(p \cdot k)(p' \cdot k)). \tag{2.16}$$

Essa expressão pode ser simplificada através da introdução das chamadas *variáveis de Mandelstam*,

$$\begin{aligned}
 s &= (p + k)^2 = 2p \cdot k + m^2 = 2p' \cdot k' + m^2 \\
 t &= (p' - p)^2 = -2p \cdot p' + 2m^2 = -2k \cdot k' \\
 u &= (k' - p)^2 = -2k' \cdot p + m^2 = -2k \cdot p' + m^2.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Da conservação de momento, obtemos a relação $s + t + u = 2m^2$. Reescrevendo em termos de s , t e u e aplicando esta identidade, chegamos a

$$I = 16(2m^4 + m^2(u - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \tag{2.18}$$

Fazendo $k \iff -k'$, logo obtemos

$$IV = 16(2m^4 + m^2(s - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \tag{2.19}$$

Repetido os mesmos procedimentos para os outros termos, II e III resultam em

$$II = III = -8(4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)). \tag{2.20}$$

Finalmente, unindo os termos do elemento da matriz ao quadrado e voltando à notação original,

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \tag{2.21}$$

Como nosso objetivo é determinar o seção de choque do processo, primeiramente é necessário eleger um referencial para iniciarmos os cálculos. Usualmente o referencial do laboratório é escolhido, como faremos aqui. Assim, o elétron estará em repouso antes do espalhamento ($p = (m, \mathbf{0})$) e após terá $p' = (E', p')$. Para o fóton, de início teremos $k = (\omega, \omega \hat{z})$, e, posteriormente, $k' = (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta)$.

Vamos usar a seguinte relação para obter a energia final do fóton, ω' ,

$$\begin{aligned}
 m^2 &= (p')^2 = (p + k - k')^2 \equiv p^2 + 2p \cdot (k - k') - 2k \cdot k' \\
 &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos \theta),
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

que implica

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta). \quad (2.23)$$

A fórmula (2.23) é conhecida como a fórmula de Compton para a variação do comprimento de onda do fóton. Resolvendo para ω' ,

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}. \quad (2.24)$$

Já a integral no espaço de fase nesse referencial fica

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} (2\pi)^2 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) \\ &= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega' E'} \\ &\quad \times 2\pi \delta(\omega' + \sqrt{m^2 + \omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega' \cos \theta} - \omega - m) \\ &= \int \frac{d\cos \theta}{2\pi} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{\left|1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{E'}\right|} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos \theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos \theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Inserindo essas expressões na fórmula geral da seção de choque e fazendo $|v_A - v_B| = 1$, obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{1}{2\omega} \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \right). \quad (2.26)$$

Recuperando (2.21), novamente fazemos uma substituição de $p \cdot k = m\omega$ e $p \cdot k' = m\omega'$, escrevendo

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right]. \quad (2.27)$$

A equação acima recebe o nome de *fórmula de Klein-Nishina*, e foi derivada pela primeira vez no ano de 1929.

De acordo com a fórmula de Compton, no limite em que ω tende a zero, a razão $\omega'/\omega \rightarrow 1$, de modo que a seção de choque fica

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} (1 + \cos^2 \theta); \quad \sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}, \quad (2.28)$$

que é apenas a seção de choque de Thomson para o espalhamento de radiação eletromagnética clássica por um elétron livre.

2.1.1 Comportamento a Altas Energias

Mudando o foco para a análise do fenômeno a altas energias, vamos começar alterando o referencial para o centro de massa do sistema. Teremos as relações

$$\begin{aligned} p \cdot k &= \omega(E + \omega) \\ p \cdot k' &= \omega(E + \omega \cos \theta) \\ E^2 &= \omega^2 + m^2. \end{aligned}$$

Inserindo as relações em (2.21), nota-se que, para $\theta \approx \pi$, o termo $p \cdot k/p \cdot k'$ apresenta grande aumento, enquanto outros termos são de $\mathcal{O}(1)$ ou menor. Assim, para $E \gg m$ e $\theta \approx \pi$,

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \cdot \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} = 2e^4 \cdot \frac{E + \omega}{E + \omega \cos \theta}. \quad (2.29)$$

A seção de choque no referencial do centro de massa é igual a, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2E} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\omega}{(2\pi)4(E + \omega)} \cdot \frac{2e^4(E + \omega)}{E + \omega \cos \theta} \\ &\approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + s(1 + \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ressaltamos que, devido a $s \gg m^2$, o denominador de (2.28) quase se anula quando o fóton é emitido na direção oposta ($\theta \approx \pi$). A massa m do elétron poderia ser ignorada nesta equação caso não fosse necessário eliminar essa singularidade. Para fazer a integração sobre $\cos \theta$, podemos eliminar o termo de massa se aplicarmos um corte equivalente próximo a $\theta = \pi$. Seguindo esse raciocínio, aproximamos a seção de choque do espalhamento Compton por

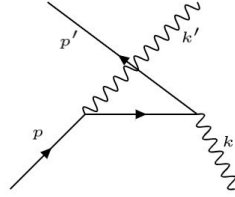
$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int_{-1+2m^2/s}^1 d(\cos \theta) \frac{1}{1 + \cos \theta}. \quad (2.31)$$

Finalmente, concluímos que a seção de choque total comporta-se a altas energias como

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \log \left(\frac{s}{m^2} \right). \quad (2.32)$$

Neste ponto, devemos tentar compreender a natureza física dessa singularidade. O

termo singular é proveniente do seguinte diagrama,



$$= -ie^2 \epsilon_\mu(k) \epsilon_{*\nu}(k') \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2} \gamma^\nu u(p). \quad (2.33)$$

Porque o denominador do propagador é pequeno (quando comparado a s , a amplitude é grande em $\theta \approx \pi$). Vamos definir a quantidade $\chi \equiv \pi - \theta$ e analisar valores maiores que m/ω , mas pequenos o suficiente para serem aproximados pro $1 - \cos \chi \approx \chi^2/2$. Nesse intervalo, o denominador é

$$(p - k')^2 - m^2 = -2p \cdot k' \approx -2\omega^2 \left(\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 - \cos \chi \right) \approx -(\omega^2 \chi^2 + m^2). \quad (2.34)$$

Vemos que isto é pequeno em comparação com s sobre um intervalo amplo de valores de χ , o que justifica o aumento na seção de choque total. Voltando à equação (2.29), nota-se que para χ tal que $m\omega \ll \chi \ll 1$, a amplitude ao quadrado é proporcional a $1/\chi^2$, de forma que podemos esperar $\mathcal{M} \propto 1/\chi$. Porém, vimos que \mathcal{M} é proporcional a χ^2 , o que sugere a existência de um fator de compensação de χ no numerador. Vamos entender como este fator surge a partir da amplitude para um conjunto de polarizações de fóton e elétron específico.

Suporemos que o elétron inicial seja destro. O termo dominante de (2.33) vem do termo que envolve $(\not{p} - \not{k}')$ no numerador do propagador. Como este termo contém três matrizes gama entre \bar{u} e u , o elétron final também deve ter a mesma orientação. A amplitude é, consequentemente,

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\mu(k) \epsilon_{*\nu}(k') u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \frac{\bar{\sigma} \cdot (p - k')}{-(\omega^2 \chi^2 + m^2)} \sigma^\nu u_R(p), \quad (2.35)$$

na qual,

$$u_R^\dagger(p) = \sqrt{2E}(0 \ 1); \quad u_R^\dagger(p') = \sqrt{2E}(1 \ 0). \quad (2.36)$$

Por outro lado, se o fóton inicial é canhoto, com $\epsilon_\mu(k) = (1/\sqrt{2})(0, 1, -i, 0)$, então o termo $u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \epsilon_\mu(k)$ se anula. Portanto, inferimos que o fóton inicial deve ser destro.

Continuando com a análise matemática, vamos nos atentar para o numerador de (2.35). Para χ no intervalo mencionado, o termo dominante será $-\sigma^1(p - k')^1 = \sigma^1 \cdot \omega \chi$. Ele indica que o estado final é um estado de onda-p, como exigido pela conservação de momento angular. Resumindo, obtemos,

$$\mathcal{M}(e_R^- \gamma_R \longrightarrow e_R^- \gamma_R) \approx e^2 \sqrt{2E} \sqrt{2} \frac{\omega \chi}{(\omega^2 \chi^2 + m^2)} \sqrt{2E} \sqrt{2} \approx \frac{4e^2 \chi}{\chi^2 + m^2/\omega^2}. \quad (2.37)$$

Analisando similarmente a equação que precede (2.37), constatamos que a amplitude não se anula somente quando o fóton inicial é canhoto e o propagador final é destro. Aprofundando esta análise, obtemos, ainda

$$\mathcal{M}(e_R^- \gamma_R \longrightarrow e_R^- \gamma_R) \approx \frac{4e^2 m / \omega}{\chi^2 + m^2 / \omega^2}. \quad (2.38)$$

Adicionando as contribuições para a seção de choque em (2.37) e a equação anterior, além de contribuições iguais para as reações que envolvem elétrons iniciais canhotos, se dividirmos por 4 para observar a média sobre os spins iniciais, temos que a seção de choque diferencial não polarizada deve ser

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2E} \frac{1}{2\omega} \frac{1}{(2\pi)4(E+\omega)} \left[\frac{8e^4 \chi^2}{(\chi^2 + m^2/\omega^2)^2} + \frac{8e^4 m^2/\omega^2}{(\chi^2 + m^2/\omega^2)^2} \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{s(\chi^2 + 4m^2/s)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

o que concorda com o resultado que havíamos obtido previamente.

Considerando o processo de inversão de helicidade, agora vamos tratar o problema do espalhamento Compton *inverso*, ou seja, um feixe de elétrons de alta energia colidindo com um feixe de fótons de baixa energia, para produzir um feixe de fótons de alta energia. Seja E a energia dos elétrons e $\bar{\omega}$ a energia dos fótons. A energia do fóton espalhado é $E' = yE$ e $s = 4E\bar{\omega} \gg m^2$.

Nessa configuração, a análise que fizemos é válida; os fótons com as maiores energias resultam do processo de espalhamento que é invertido do referencial do centro de massa. Calculando $2k \cdot k'$ tanto no referencial do centro de massa quanto do laboratório, observamos que a energia final do fóton está relacionada ao ângulo de espalhamento do centro de massa por

$$y \approx \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}. \quad (2.40)$$

Assim, a equação (2.39) pode ser reescrita como uma fórmula para a distribuição de energia dos fótons espalhados em reversão próximos ao ponto final [1],

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{s((1-y) + 16m^2/s^2)^2} \left[(1-y) + \frac{16m^2}{s} \right], \quad (2.41)$$

no qual o primeiro termo entre colchetes corresponde ao processo que conserva a helicidade e o segundo termo corresponde ao processo de inversão da helicidade. Esse efeito é usado em experimentos para medir a polarização do feixe eletrônico ou, ainda, para criar fontes de fótons de alta energia com distribuições de energia e polarização ajustáveis.

Parte II

Correções Radiativas

3 Introdução às Correções Radiativas

A fim de introduzir as denominadas correções radiativas, vamos analisar o fenômeno de *bremsstrahlung* suave, avaliando classicamente a intensidade da baixa frequência da radiação do fenômeno quando o elétron sofre uma aceleração repentina. Na contrapartida da teoria quântica de campos, computaremos a seção de choque da emissão de um fóton de baixa energia. Assim, espera-se que o resultado clássico surja como um caso limite do quântico [1].

3.1 Caso clássico

Consideremos o problema em que o elétron muda seu quadrimomento de p para p' após um impulso no instante $t = 0$ e posição $\mathbf{x} = 0$. Escrevendo a corrente do elétron e considerando-a como fonte das equações de Maxwell, obtemos o seu campo de radiação. Para uma partícula carregada em $\mathbf{x} = 0$,

$$j^\mu(x) = (1, \mathbf{0}) \cdot e\delta^{(3)}(x) = \int dt (1, \mathbf{0}) \cdot e\delta^{(4)}(x^\mu - y^\nu(t)), \quad y^\nu(t) = (t, \mathbf{0}), \quad (3.1)$$

de forma que, para uma trajetória arbitrária $y^\mu(\tau)$, a corrente fica,

$$j^\mu(x) = e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x^\mu - y^\nu(\tau)). \quad (3.2)$$

Para uma função teste $f(x)$ que cai no infinito, tem-se

$$\begin{aligned} \int d^4x f(x) \partial_\mu j^\mu(x) &= \int d^4x f(x) e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu \delta(x - y(\tau)) \\ &= -e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x)|_{x=y(\tau)} \\ &= -e \int d\tau \frac{d}{d\tau} f(y(\tau)) \\ &= -ef(y(\tau))|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como a trajetória do processo é

$$y^\mu(\tau) = (p^\mu/m)\tau, \quad \tau < 0, \\ (p'^\mu/m)\tau, \quad \tau > 0;$$

reescrevemos a corrente como

$$j^\mu(x) = \int_0^\infty d\tau \frac{p'^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p'}{m}\tau\right) + \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p}{m}\tau\right). \quad (3.4)$$

Para garantir que as integrais convirjam, inserimos os fatores $e^{-\epsilon\tau}$ e $e^{\epsilon\tau}$, de tal forma que

$$\begin{aligned}\tilde{j}^\mu(k) &= \int d^4x e^{ik \cdot x} j^\mu(x) \\ &= ie \left(\frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\epsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p + i\epsilon} ig \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

No calibre de Lorentz ($\partial^\mu A_\mu = 0$), devemos resolver, no espaço de Fourier,

$$\tilde{A}^\mu(k) = -\frac{1}{k^2} \tilde{j}^\mu(k). \quad (3.6)$$

Utilizando 3.5, o potencial vetor fica

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{-ie}{k^2} \left(\frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\epsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p + i\epsilon} ig \right). \quad (3.7)$$

Resolveremos a integral em k^0 como uma integral de contorno no plano complexo, cujos pólos estão em $k \cdot p = 0$, $k \cdot p' = 0$ e $k^0 = \pm |\mathbf{k}|$.

Para $t < 0$, fechamos o contorno para cima, pegando o pólo $k \cdot p = 0$, ou seja, $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/p^0$, resultando em

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/p^0)t} \frac{(2\pi i)(+ie)}{(2\pi)k^2} \frac{p^\mu}{p^0}. \quad (3.8)$$

No referencial onde no instante inicial a partícula está em repouso, o potencial fica,

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{e}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (1, \mathbf{0}), \quad (3.9)$$

ou seja, o potencial vetor do elétron corresponde ao potencial coulombiano de uma carga desacelerada - não existe campo de radiação antes do espalhamento.

Para $t > 0$, após o espalhamento, fechamos o contorno para baixo, pegando os três pólos restantes. Analogamente, o pólo $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'/p'^0$ corresponde ao potencial de Coulomb da partícula que sai após a colisão. Contudo, os outros dois pólos originam o campo de radiação,

$$\begin{aligned}A_{\text{rad}}^\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-e}{2|\mathbf{k}|} \left[e^{-ik \cdot x} \left(\frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} + \text{c.c.} \right) \right]_{k^0=|\mathbf{k}|} \\ &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x},\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde,

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) = \frac{-e}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right), \quad (3.11)$$

é a amplitude momento-espço. Calculando os campos elétrico e magnético,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \quad \mathcal{E}(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + ik^0\mathcal{A}(\mathbf{k}) \\ \mathbf{B}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{B}(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \quad \mathcal{B}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{A}(\mathbf{k}) = \hat{k} \times \mathcal{E}(\mathbf{k}),\end{aligned}\tag{3.12}$$

obtemos a energia irradiada

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x (|\mathbf{E}(x)|^2 + |\mathbf{B}(x)|^2).\tag{3.13}$$

O termo de campo elétrico, usando (3.12), fica

$$\begin{aligned}& \frac{1}{8} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} (\mathcal{E}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) e^{ikx}) \cdot (\mathcal{E}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} + \mathcal{E}^*(\mathbf{k}') e^{ik'x}) \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}(-\mathbf{k}) e^{-2ik^0t} + 2\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) + \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(-\mathbf{k}) e^{2ik^0t}),\end{aligned}\tag{3.14}$$

de forma que também podemos obter uma expressão semelhante para o termo do campo magnético. Utilizando o fato de que $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ é transversal, explícito em (3.12), os termos com dependência temporal se cancelam entre $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ e $\mathcal{B}(\mathbf{k})$, reduzindo a energia à expressão

$$E = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}).\tag{3.15}$$

Devido à transversalidade de $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, convém introduzir vetores unitários de polarização transversal,

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k})|^2 = |\mathbf{k}|^2 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{k})|^2.\tag{3.16}$$

Assim, usando a amplitude (3.11),

$$E = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \frac{e^2}{2} \left| \epsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}'}{k \cdot p'} - \frac{\mathbf{p}}{k \cdot p} \right) \right|^2,\tag{3.17}$$

modificamos a expressão da energia. Trocando ϵ , \mathbf{p}' e \mathbf{p} por quadrvetores e usando a substituição $\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu^*$ por $-g_{\mu\nu}$ para somar sobre as polarizações, tem-se

$$\begin{aligned}E &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} (-g_{\mu\nu}) \left(\frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) \left(\frac{p'^\nu}{k \cdot p'} - \frac{p^\nu}{k \cdot p} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} \left(\frac{2p \cdot p'}{(k \cdot p')(k \cdot p)} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} \right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

No referencial onde $p^0 = p'^0 = E$, a energia irradiada fica

$$E = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int dk \mathcal{I}(v, v'),\tag{3.19}$$

na qual $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ vale

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \left(\frac{2(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')} - \frac{m^2/E^2}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')^2} - \frac{m^2/E^2}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})^2} \right). \quad (3.20)$$

Como a intensidade diferencial (3.20) não depende de k , verificamos que a integral (3.19) diverge. Isso acontece devido ao fato de inicialmente termos assumido uma variação infinitamente repentina no momento da partícula. Porém, a fórmula (3.19) deve ser válida somente para a radiação cuja frequência é menor que o recíproco do tempo do espalhamento, de maneira que devemos limitá-la a uma frequência máxima $k_{\text{máx}}$,

$$E = \frac{\alpha}{\pi} \cdot k_{\text{máx}} \cdot \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (3.21)$$

Avaliemos a integral (3.20) no limite relativístico extremo, no qual a maior parte da energia irradiada vem dos dois picos no seu primeiro termo, quando $\hat{\mathbf{k}}$ é paralelo a \mathbf{v} ou \mathbf{v}' . Vamos dividi-la em duas partes, uma para cada pico, colocando $\theta = 0$ ao longo do pico em cada caso. Integrando sobre uma região pequena em torno de $\theta = 0$ [1], temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &\approx \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - v \cos \theta)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')} \\ &+ \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - v' \cos \theta)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')} \end{aligned} \quad (3.22)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &\approx \log \left(\frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{1 - |\mathbf{v}|} \right) + \log \left(\frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{1 - |\mathbf{v}'|} \right) = \log \left(\frac{(E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2}{E^2(E - p)^2} \right) \\ &\approx 2 \log \left(\frac{p \cdot p'}{(E^2 - p^2)/2} \right) = 2 \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right), \quad q^2 = (p' - p)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O que se pode inferir desses resultados é que a energia a baixas frequências é dada por

$$E = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\text{máx}}} dk \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \xrightarrow{E \gg m} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\text{máx}}} dk \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right), \quad (3.24)$$

e, ainda, se tratarmos de fótons, teremos uma contribuição k de cada um para a energia, esperando que o número dessas partículas seria, portanto,

$$\text{Número de fótons} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\text{máx}}} \frac{dk}{k} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (3.25)$$

Nesse ponto, resta analisar o problema quântico a fim de nos certificarmos de que os resultados coincidam.

3.2 Caso Quântico

Consideremos, agora, o caso em que um fóton é irradiado durante o espalhamento de um elétron.

Seja \mathcal{M}_0 a parte da amplitude que emerge da interação do elétron com o campo externo. Daqui, podemos escrever a amplitude de todo o processo como

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p') \left(\mathcal{M}_0(p', p - k) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k) + \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p' + k, p) \right) u(p). \quad (3.26)$$

Como o objetivo desta análise é comparar os resultados clássico e quântico, vamos assumir $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$, de forma que podemos desprezar \not{k} nos numeradores dos propagadores e, além disso, é válida a aproximação

$$\mathcal{M}_0(p', p - k) \approx \mathcal{M}_0(p' + k, p) \approx \mathcal{M}_0(p', p). \quad (3.27)$$

Simplificando, a amplitude nessa aproximação é igual a

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p') [\mathcal{M}_0(p', p)] u(p) \cdot \left[e \left(\frac{p' \cdot \epsilon^*}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^*}{p \cdot k} \right) \right], \quad (3.28)$$

que corresponde exatamente à amplitude do espalhamento elástico multiplicada pelo fator referente à emissão do fóton.

A seção de choque expressa em termos da seção de choque elástica é calculada inserindo uma integração no espaço de fase para a variável k do fóton. Fazendo a soma sobre os estados de polarização do fóton, tem-se

$$d\sigma(p \longrightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \longrightarrow p') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2, \quad (3.29)$$

de modo que a probabilidade diferencial de irradiação de um fóton com momento k , dado um elétron que espalha de p para p' é

$$d(\text{prob}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{e^2}{2k} \left| \epsilon_\lambda \cdot \left(\frac{\mathbf{p}'}{p' \cdot k} - \frac{\mathbf{p}}{p \cdot k} \right) \right|^2. \quad (3.30)$$

Observando (3.30), poderíamos nos precipitar e multiplicar a expressão pela energia do fóton k , recuperando o resultado já obtido classicamente para a energia irradiada esperada. Entretanto, surgem alguns problemas se fizermos uma análise mais detalhada. Primeiramente, a equação (3.30) representa a probabilidade de irradiação de um único fóton, e não o número esperado de fótons irradiados. Ademais, a integração sobre o momento do fóton é divergente.

É possível contornar esse problema utilizando o mesmo raciocínio do problema clássico : basta estimar a energia máxima e limitar a integral. Considerando $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$, a probabilidade total fica

$$\text{Probabilidade total} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\mathbf{q}|} dk \frac{1}{k} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (3.31)$$

Como $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ independe de k , a integral diverge em seu limite inferior, onde todas as aproximações são bem justificadas [1]. Assim, a probabilidade total de irradiação de um fóton é infinita. Daqui surge o problema das divergências infravermelhas na teoria de perturbação da QED.

Caso se assumisse que o fóton teria uma massa bem pequena μ , seria possível diminuir o limite da integral e reescrever a probabilidade diferencial tal como

$$d\sigma(p \longrightarrow p' + \gamma(k)) = d\sigma(p \longrightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \\ \stackrel{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} d\sigma(p \longrightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \quad (3.32)$$

Vamos ver que a solução da dependência de μ consiste na reinterpretação de (3.30), fundamentada nos diagramas de Feynman. Para isso, introduziremos uma discussão sobre a correção radiativa do espalhamento de um elétron decorrente da presença de um fóton virtual adicional.

3.2.1 Diagramas com loop

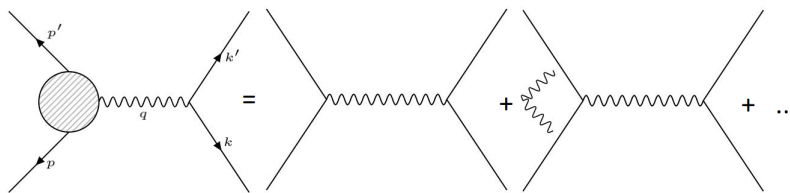


Figura 2 – Classe de diagramas

Vamos estudar os diagramas da figura 2. O círculo no primeiro diagrama indica a soma dos vértices elétron-fóton de ordem mais baixa e todas as correções de loop amputadas. Denotaremos a soma por $-ie\Gamma^\mu(p', p)$. Usando a fórmula para elementos da matriz-S (ver [1], seção 4.1), a amplitude do espalhamento de um elétron de um alvo pesado é

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left(\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \right) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right). \quad (3.33)$$

Como a função $\Gamma^\mu(p', p)$ aparece no elemento da matriz-S do espalhamento de um elétron de um campo eletromagnético externo, vamos adicionar a interação $\Delta H_{int} = \int d^3x e A_\mu^{cl} j^\mu$ à hamiltoniana da QED, com a corrente eletromagnética $j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

e A_μ^{cl} um potencial clássico fixo. Na ordem dominante da teoria de perturbação, tem-se, para esse campo,

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^{0'} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p). \quad (3.34)$$

As correções no vértice tornam a expressão

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^{0'} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p). \quad (3.35)$$

Nesse ponto, poderíamos pensar em uma forma de restringir a forma de Γ^μ aplicando a invariância de Lorentz. Como esse objeto se transforma como uma vetor, deve ser uma combinação linear de γ^μ , p^μ e p'^μ . Portanto, convém escrever,

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C. \quad (3.36)$$

Os coeficientes poderiam estar em termos de \not{p} ou \not{p}' , mas como $\not{p}u(p) = m \cdot u(p)$ e $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p') \cdot m$, eles podem ser escritos em termos de números ordinários sem perda de generalidade. Assim, os coeficientes devem ser funções de $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$, já que é o único escalar não nulo disponível.

Podemos, ainda, aplicar a identidade de Ward¹, $q_\mu \Gamma^\mu = 0$, de tal forma que o primeiro e o segundo termo de (3.36) se anulam, ao contrário do terceiro. Daqui, pode-se concluir que $C = 0$. Reescrevendo (3.36), utilizando a chamada identidade de Gordon,

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p) \quad (3.37)$$

temos que essa equação fica

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (3.38)$$

onde F_1 e F_2 são chamados fatores de forma. Na ordem mais baixa, $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$.

Devido ao fato de que os fatores de forma contém toda a informação sobre a influência do campo eletromagnético no elétron, deveriam conter, também, os acoplamentos elétrico e magnético. Assim, vamos computar a amplitude de um espalhamento coulombiano elástico de um elétron não-relativístico de uma região de potencial elétrico diferente de zero, a partir de (3.35). Fazamos $A_\mu^{cl}(x) = (\phi(x), \mathbf{0})$ e, portanto, $\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = ((2\pi)\delta(q^0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}), 0)$. Em (3.35),

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^0(p', p)u(p) \cdot \tilde{\phi}(\mathbf{q}). \quad (3.39)$$

Considerando que o campo eletrostático varia bem lentamente em uma região grande, $\phi(\mathbf{q})$ se concentrará em torno de $\mathbf{q} = 0$, então podemos considerar o limite $\mathbf{q} \rightarrow 0$ no elemento de matriz do espinor,

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^\dagger(p')u(p) \approx 2m\xi'^\dagger \xi. \quad (3.40)$$

¹ Faremos algumas discussões sobre esta identidade posteriormente.

A amplitude do espalhamento de um elétron de um campo elétrico fica

$$i\mathcal{M} = -ieF_1(0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \cdot 2m\xi'^{\dagger}\xi, \quad (3.41)$$

que corresponde à aproximação de Born para o espalhamento de um potencial $V(\mathbf{x}) = eF_1(0)\phi(\mathbf{x})$. Ou seja, $F_1(0)$ é a carga do elétron em unidades de e . Assim, como $F_1(0) = 1$ na ordem dominante da teoria de perturbação, correções radiativas para $F_1(q^2)$ devem se anular em $q^2 = 0$.

Para estabelecer uma conexão entre os fatores de forma e o momento magnético do elétron, faremos análise semelhante para o espalhamento de um elétron de um potencial vetor estático. Seja $A_{\mu}^{cl}(x) = (0, \mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))$. Então,

$$i\mathcal{M} = +ie \left[\bar{u}(p') \left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_{\nu}}{2m} F_2 \right) u(p) \right] \tilde{A}_{cl}^i(\mathbf{q}). \quad (3.42)$$

A expressão em colchetes se anula em $\mathbf{q} = 0$. Assim, para obter a contribuição linear em q^i , vamos inserir a expansão não relativística do espinor $u(p)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi &\approx \sqrt{m}(1 - \mathbf{p} \cdot \sigma / 2m) \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi &\approx \sqrt{m}(1 + \mathbf{p} \cdot \sigma / 2m) \xi, \end{aligned} \quad (3.43)$$

de forma que o termo de F_1 pode ser simplificado como

$$\bar{u}(p') \left(\frac{i}{2m} \sigma^{i\nu} q_{\nu} \right) u(p) = 2m\xi'^{\dagger} \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi. \quad (3.44)$$

Logo, o termo linear em q^j completo na função do vértice elétron-fóton é

$$\bar{u}(p') \left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_{\nu}}{2m} F_2 \right) u(p) \stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} 2m\xi'^{\dagger} \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi, \quad (3.45)$$

que em (3.42) dá

$$i\mathcal{M} = -i(2m) \cdot e\xi'^{\dagger} \left(\frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \bar{B}^k(\mathbf{q}), \quad \bar{B}^k(\mathbf{q}) = -i\epsilon^{ijk} q^j \tilde{A}_{cl}^k(\mathbf{q}). \quad (3.46)$$

Repetindo a interpretação da aproximação de Born, o potencial é o de uma interação de momento magnético [2],

$$V(\mathbf{x}) = - < \mu > \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad < \mu > = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi'^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi. \quad (3.47)$$

Reescrevendo o momento magnético do elétron na forma padrão, temos

$$\mu = g \left(\frac{e}{2m} \right) \mathbf{S}, \quad (3.48)$$

onde \mathbf{S} é o spin do elétron e g , o fator- g de Landé, é da forma

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (3.49)$$

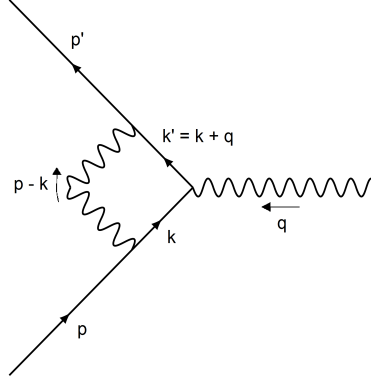


Figura 3 – Diagrama de um loop.

Como não há termo com F_2 na ordem dominante da teoria de perturbação, a eletrodinâmica quântica prevê $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$, que sem os termos de α corresponde à previsão da equação de Dirac. Todavia, em ordens superiores existe um termo não nulo de F_2 , que implica uma menor diferença entre o momento magnético do elétron e o previsto por Dirac. Vamos computar a contribuição de ordem α para este momento magnético anômalo.

Para isso, consideremos o diagrama da figura 3.

Ao aplicar as regras de Feynman até ordem α , encontramos $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$, no qual

$$\delta\Gamma^\mu(p', p) = 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p)[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (3.50)$$

A resolução dessa integral exige a aplicação de um método conhecido como parâmetros de Feynman [4], que será detalhado na seção a seguir.

3.2.1.1 Parâmetros de Feynman

Este método consiste em reescrever o denominador de (3.50) como um polinômio quadrático único em k , elevado à terceira potência, deslocando k por uma constante para completar os quadrados no polinômio e, por fim, avaliar a integral esférica simétrica.

Vamos usar a identidade

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}. \quad (3.51)$$

Como exemplo, teríamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2-m^2)]^2} \\ &\quad \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2]^2}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando a substituição $l \equiv k - xp$, vemos que o denominador depende apenas de l^2 , de forma que a integração em k seria facilitada, já que $d^4k = d^4l$ e o integrando é esfericamente simétrico com respeito a l . Os parâmetros de Feynman são aqueles que tornam a transformação possível; nesse caso, x e y .

Como a integral de interesse possui um denominador com três fatores, derivamos (3.51) a fim de obter uma fórmula generalizada aplicável ao nosso problema,

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}, \quad (3.53)$$

por indução,

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_n A_n]^n}. \quad (3.54)$$

Aplicando (3.54) a (3.50),

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3}, \quad (3.55)$$

onde o novo denominador D vale

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k - p)^2 + (x + y + z)i\epsilon \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde $x + y + z = 1$ e $k' = k + q$. Agora, desloquemos k para completar o quadrado $l \equiv k + yq - zp$. Com a substituição correta, o dividendo é simplificado como

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \quad \Delta \equiv -xyq^2 + (1 - z)^2 m^2. \quad (3.57)$$

Como $q^2 < 0$ para um processo de espalhamento, Δ é positivo, o que permite a interpretação de um termo de massa efetiva. Precisamos expressar o numerador em termos de l . Nota-se que, como D depende somente da magnitude de l ,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} &= 0 \\ \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2}{D^3}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A primeira equação será verdade devido à simetria. Analisando a segunda expressão, observamos que a integral se anula por simetria quando $\mu \neq \nu$. Pela invariância de Lorentz, devemos obter algo proporcional a $g^{\mu\nu}$. Para checar o coeficiente, vamos contrair cada lado com $g_{\mu\nu}$, obtendo

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= \bar{u}(p') \left[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu \right] u(p) \\ &\longrightarrow \bar{u}(p') \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + (-y \not{q} + z \not{p}) \gamma^\mu ((1 - y) \not{q} + z \not{p}) \right. \\ &\quad \left. + m^2 \gamma^\mu - 2m((1 - 2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p), \quad k' = k + q. \end{aligned} \quad (3.59)$$

O objetivo é agrupar tudo em dois termos, proporcionais a γ^μ e $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. A melhor maneira de atingi-lo é buscar uma expressão da forma

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C, \quad (3.60)$$

como fizemos anteriormente. Assim, basta usar as relações de anticomutação $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$ e a equação de Dirac $\not{p}u(p) = mu(p)$, $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$, obtendo

$$\begin{aligned} \text{Numerador} = \bar{u}(p') = & \left[\gamma^\mu \cdot \left(\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2) \right) \right. \\ & \left. + (p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y) \right] u(p). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Novamente, esperamos que o coeficiente de q^μ se anule conforme a identidade de Ward. De fato, nota-se que o denominador (3.57) é simétrico sob a transformação de x para y , sendo o coeficiente de q^μ ímpar nessa condição e, portanto, se anulando quando integrado sobre essas variáveis.

Como fizemos anteriormente, vamos usar a identidade de Gordon para substituir o termo de soma de p' e p por $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Então, a contribuição de ordem α para o vértice do elétron fica

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) = & 2ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \\ & \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2z(1-z)) \right] u(p), \end{aligned} \quad (3.62)$$

com D e Δ iguais ao caso anterior.

Agora, é necessário resolver a integral no momento. Poderíamos repetir o procedimento feito anteriormente de avaliar a integral em l^0 como uma integral de contorno, resolvendo a parte espacial em coordenadas esféricas. Entretanto, vamos introduzir a chamada rotação de Wick para solucionar esse problema.

Vamos remover o sinal de menos da métrica de Minkowski para resolver a integral em coordenadas "esféricas" quadri-dimensionais. Assim, consideremos um contorno de integração no plano- l^0 . Devido à localização dos pólos e ao fato de que o integrando cai suficientemente rápido quando $|l^0|$ é grande, é possível rotacionar o contorno no sentido anti-horário por 90° . Dessarte, definimos o quadrimomento Euclideano l_E ,

$$l^0 \equiv il_E^0, \quad l = l_E, \quad (3.63)$$

com o contorno rotacionado variando de $l_E^0 = -\infty$ a $l_E^0 = \infty$.

Vamos começar com

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^m} &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4l_E \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{[l_E^2 + \Delta]^m}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

O fator $\int d\Omega_4$ equivale à área da superfície de uma esfera quadri-dimensional, que é igual a $2\pi^2$. Para o restante da integral, temos

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{|l^2 - \Delta|^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}, \quad (3.65)$$

e ainda,

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{|l^2 - \Delta|^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}, \quad m > 3. \quad (3.66)$$

Esse resultado é válido somente para $m > 3$, já que para $m = 3$, a rotação de Wick não se justifica e a integral diverge. Nesse momento, convém introduzir uma regra para torná-la finita. Vamos substituir o propagador do fóton em (3.50) por

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (3.67)$$

onde Λ é uma massa muito grande. O integrando não é afetado para k pequeno, mas corta suavemente quando $k \gtrsim \Lambda$. Podemos pensar no segundo termo como o propagador de um fóton pesado fictício, cuja contribuição é subtraída da do fóton ordinário. Nos termos que envolvem o fóton ordinário, a álgebra do numerador não muda e o denominador é alterado por

$$\Delta \longrightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\Lambda^2. \quad (3.68)$$

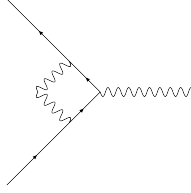
A integral (3.66), então, torna-se convergente e pode sofrer rotação de Wick e ser avaliada

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(\frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{l^2}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E^2 \left(\frac{l_E^4}{(l_E^2 + \Delta)^3} - \frac{l_E^4}{(l_E^2 + \Delta_\Lambda)^3} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Assim, os termos convergentes de (3.62) são modificados por termos de ordem Λ^{-2} , os quais podem ser ignorados.

O procedimento executado pode ser resumido na introdução de partículas pesadas fictícias para tornar finita a integral de Feynman e recebe o nome de regularização de Pauli-Villars. Como o fóton fictício foi introduzido por conveniência e não possui nenhum significado físico, esperamos que o parâmetro Λ não apareça no resultado final para seções de choque observáveis.

Dessa maneira, avaliando a integral (3.62) com (3.65) e (3.69), obtemos a expressão explícita para a correção do vértice de 1-loop



$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \quad (3.70)$$

$$\times \bar{u}(p') \left(\gamma^\mu \left[\log \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \left[\frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z) \right] \right) u(p),$$

onde os termos em colchetes são as correções dos fatores de forma.

Observe que a divergência ultravioleta aparece, em efeito único, na correção de $F_1(q^2 = 0)$, que deveria ser fixo em 1. Sendo assim, vamos propor sua extinção subtraindo de (3.70) um termo proporcional à função do vértice de ordem zero ($\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$), de forma a manter a condição $F_1(0) = 1$. Ou seja, se δF_1 é a correção de primeira ordem para F_1 ,

$$\delta F_1(q^2) \longrightarrow \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0). \quad (3.71)$$

Há, também, uma divergência infravermelha em $F_1(q^2)$ proveniente de $1/\Delta$. Por exemplo, em $q^2 = 0$, o termo é

$$\int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{1 - 4z + z^2}{\Delta(q^2 = 0)} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{m^2(1-z)^2} \quad (3.72)$$

$$= \int_0^1 dz \frac{-2}{m^2(1-z)} + \text{termos finitos}.$$

É possível resolver este problema atribuindo uma massa não nula μ ao fóton. Dessa maneira, no denominador do propagador do fóton, $(k-p)^2$ tornaria-se $(k-p)^2 - \mu^2$. Esse denominador aparece multiplicado por z em (3.56), então, o efeito é de adicionar um termo de $z\mu^2$ em Δ .

Com as modificações mencionadas, os fatores de forma ficam

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \quad (3.73)$$

$$\times \left[\log \left(\frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right) + \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy + \mu^2 z} \right.$$

$$\left. - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2);$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \left[\frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right] + (\alpha^\epsilon), \quad (3.74)$$

e notamos que ambas as divergências não afetam $F_2(q^2)$. Portanto, podemos avaliar categoricamente

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \quad (3.75)$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Daqui concluímos que a correção para o fator-g do elétron vale

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614. \quad (3.76)$$

Este valor já havia sido obtido em 1948 por Schwinger. Experimentalmente, o fator de correção dá $a_e = 0.0011597$, o que ratifica o obtido em (3.76).

Agora, vamos analisar as divergências infravermelhas de $F_1(q^2)$. A parte dominante, no limite $\mu \rightarrow 0$, é

$$F_1(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \left[\frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2xy + \mu^2z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2z} \right]. \quad (3.77)$$

Para interpretar (3.77) é necessário fazer algumas simplificações, extraíndo e avaliando a parte divergente da integral. Dessa forma, vamos manter somente os termos divergentes nesse limite.

Primeiramente, observamos que a divergência aparece onde $z \approx 1$ e, portanto, $x \approx y \approx 0$. Então, vamos fixar $z = 1$ e $x = y = 0$ nos numeradores de (3.77) e $z = 1$ nos termos de μ^2 nos denominadores. Resolvendo a integral em x , temos

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2(1-z)^2 - q^2y(1-z-y) + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right]. \quad (3.78)$$

Introduzindo as novas variáveis

$$y = (1-z)\xi, \quad w = (1-z),$$

a integral fica

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d(w^2) \left[\frac{-2m^2 + q^2}{[m^2 - q^2\xi(1-\xi)]w^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2w^2 + \mu^2} \right] \quad (3.79)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \log \left(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2} \right) + 2 \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right].$$

No limite $\mu \rightarrow 0$, qualquer termo proporcional a m^2 ou q^2 é efetivamente o mesmo no numerador, de forma que escrevemos

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{-q^2 \text{ ou } m^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.80)$$

no qual o coeficiente do logaritmo divergente é

$$f_{IR}(q^2) = \int_0^1 \left(\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \right) d\xi - 1. \quad (3.81)$$

Observe que, como $\xi(1-\xi)$ tem valor máximo em $1/4$ e q^2 é negativo, o primeiro termo de f_{IR} é maior que um, tornando-o positivo.

Neste ponto, podemos nos perguntar como o termo infinito afeta a seção de choque de um elétron espalhando de um potencial. Temos que $F_1(q^2)$ é a quantidade que multiplica γ^μ no elemento de matriz e, assim, podemos encontrar a nova seção de choque pela substituição $e \rightarrow e \cdot F_1(q^2)$. Considerando o processo $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{-q^2 \text{ ou } m^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \quad (3.82)$$

A partir deste resultado, podemos desconfiar de que há algo incorreto, já que a correção de ordem α para a seção de choque, além de ser infinita, é também negativa.

A fim de compreender melhor a divergência, vamos avaliar o coeficiente $f_{IR}(q^2)$ no limite $-q^2 \rightarrow \infty$. Nesse limite, encontramos um segundo logaritmo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2/2}{-q^2\xi(1-\xi) + m^2} &\simeq \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} + \left(\text{Contribuição igual de } \xi \approx 1 \right) \\ &= \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

e o fator de forma é, portanto,

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (3.84)$$

Este logaritmo duplo também surgiu na seção de choque (3.29) do problema de *bremsstrahlung* trabalhado anteriormente. Essa correspondência sugere um caminho de resolução do problema de divergência infravermelha. Comparando (3.29) e (3.84), no limite $-q^2 \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right], \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[\frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Olhando separadamente, essas seções de choque divergem, mas a soma é independente de μ e finita. Isso é o que ocorre de fato; as seções de choque elástica e a de *bremsstrahlung* suave não podem ser medidas individualmente, somente a soma é observável fisicamente.

Como em um experimento real o detector de fótons detecta somente fótons com uma energia mínima E , a probabilidade de um detector não identificar um fóton em um espalhamento corresponde à soma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(k < E_l)) \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{medida}, \quad (3.86)$$

cujas partes divergentes são

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{medida} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 & \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ ou } m^2}{\mu^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \log\left(\frac{E_l^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Vimos que quando $-q^2 \gg m^2$, $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{IR}(q^2)$. Se a mesma relação funcionar para q^2 arbitrário, a seção de choque medida fica

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{medida} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ ou } m^2}{E_l^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right], \quad (3.88)$$

que depende de condições experimentais, porém não mais de μ^2 . Nesse caso, as divergências infravermelhas do *bremsstrahlung* suave e de $F_1(q^2)$ se cancelam, resultando em uma seção de choque finita para uma quantidade que pode realmente ser medida.

Entretanto, ainda é preciso verificar a condição $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{IR}(q^2)$ para quaisquer valores de q^2 . Da equação (3.19), temos

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \left(\frac{2p \cdot p'}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p)^2} \right). \quad (3.89)$$

Os segundo e terceiro termos ficam

$$\int \frac{d\Omega_k}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{(p^0 - p\cos\theta)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2}. \quad (3.90)$$

Já o primeiro termo pode ser resolvido combinando os denominadores com um parâmetro de Feynman,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} &= \int_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{1}{[\xi \hat{k} \cdot p' + (1-\xi)\hat{k} \cdot p]^2} \\ \int_0^1 d\xi \frac{1}{[\xi p' + (1-\xi)p]^2} &= \int_0^1 d\xi \frac{1}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Somando os termos de $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, temos

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int_0^1 \left(\frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2} \right) d\xi - 2 = 2f_{IR}(q^2), \quad (3.92)$$

que corresponde exatamente à condição necessária para que a divergência infravermelha seja cancelada.

Uma ressalva interessante a ser feita neste ponto é que a equação (3.88), mesmo demonstrando o cancelamento da divergência infravermelha, possui pouco uso prático, já que, para um experimento, se deseja saber precisamente a dependência em q^2 , que não foi avaliada com cuidado. Todavia, em (3.84) obtivemos cautelosamente o coeficiente correto de $\log^2(-q^2)$, no limite $-q^2 \gg m^2$. Nesse limite, (3.88) se torna

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{medida}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{E_l^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \quad (3.93)$$

Este resultado, além de não ser ambíguo, também é bastante útil.

Apesar de o tratamento feito até aqui remover com sucesso os infinitos dos nossos cálculos para o *bremsstrahlung* e a correção de vértice, ainda restam algumas questões a serem trabalhadas. Primeiramente, a correção para a seção de choque medida que encontramos depois do cancelamento da divergência infravermelha pode ser feita arbitrariamente negativa fazendo os detetores de fótons com um limite de medição suficientemente baixo. Em segundo lugar, ainda não conseguimos reproduzir o resultado clássico para o número de fótons irradiados durante a colisão.

Além disso, não demonstramos o cancelamento das divergências infravermelhas além da ordem dominante. Assim, vamos discutir os termos com o maior aumento logarítmico em cada ordem da teoria de perturbação. Em geral, esses termos são de ordem

$$\left[\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\right]^n$$

na enésima ordem da teoria de perturbação. Para interpretá-los fisicamente, consideremos as seguintes afirmações.

Divergências infravermelhas surgem de fótons com momento suave, ou seja, fótons reais com energia menor que uma energia de corte E_l , e fótons virtuais com $k^2 < E_l^2$, depois de sofrerem a rotação de Wick. Desse modo, um diagrama de ordem mais alta envolve diversos fótons reais e virtuais. Porém, a divergência não surge somente com a presença do fóton suave, é necessário um denominador único no propagador do elétron. Dessa forma, sejam os diagramas da figura (4).

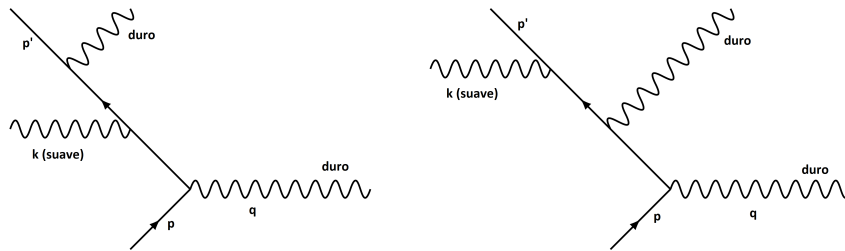


Figura 4 – Emissão de fóton suave e duro.

No primeiro diagrama, no qual primeiramente há emissão de um fóton suave, não existe divergência infravermelha, já que o momento em ambos os propagadores do elétron

estão distantes da *mass shell*. No segundo diagrama, o fóton suave é emitido por último, fazendo com que o denominador do propagador adjacente seja $(p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$, que se anula conforme k tende a zero, ou seja, o segundo diagrama contém uma divergência.

Assim, seria interessante considerar diagramas nos quais um processo arbitrário, possivelmente envolvendo emissão de fótons duros e suaves, são modificados pela adição de fótons reais e virtuais nas pernas do elétron. Seguindo esta ideia, vamos somar as contribuições de todos esses diagramas, contando todas as formas nas quais os fótons podem aparecer.

De início, consideremos a linha de um elétron que sai. Colocando n fótons na linha, cada um com momento $k_i, i = 1, \dots, n$, a estrutura de Dirac deste diagrama é

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + m)}{2p' \cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)}{2p' \cdot (k_1 + k_2) + \mathcal{O}(k^2)} \\ \dots(-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \not{k}_2 + \dots + \not{k}_n + m)}{2p' \cdot (k_1 + \dots + k_n) + \mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{duro}), \end{aligned} \quad (3.94)$$

ignorando se esses fótons são externos ou conectados uns aos outros. Vamos fazer algumas considerações assim como foi feito no caso do *bremsstrahlung*. Todos os k_i são pequenos, de forma que os termos de $\mathcal{O}(k^2)$ no denominador e de \not{k}_i no numerador são desprezíveis. Além disso, podemos usar

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^{\mu_1}(\not{p}' + m)\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m)\dots &= \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m)\dots \\ &= \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}2p'^{\mu_2}\dots \end{aligned}$$

para transformar a expressão (3.94) em

$$\bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\dots\left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot (k_1 + \dots + k_n)}\right)\dots \quad (3.95)$$

Neste ponto, devemos somar, portanto, sobre todas as possíveis ordens dos momentos k_i , considerando a linha dos elétrons que saem. Há $n!$ diagramas distintos a serem somados, correspondentes às $n!$ permutações dos momentos do fóton n . Se a permutação for π , de forma que $\pi(i)$ é um número entre 1 e n ao qual i é levado, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\text{todas as permutações } \pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \dots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)} + \dots + k_{\pi(n)})} \\ = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \dots \frac{1}{p \cdot k_n}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Colocando em evidência o último fator do lado esquerdo da equação, que é o mesmo para cada permutação π , este lado fica

$$\text{LHS} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \dots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)} + \dots + k_{\pi(n-1)})}. \quad (3.97)$$

Sabemos que, para qualquer π , a quantidade somada é independente de $k_\pi(n)$. Reescrevendo $i = \pi(n)$, temos

$$\sum_{\pi} = \sum_{i=1}^n \sum_{\pi'(i)},$$

no qual $\pi'(i)$ representa o conjunto das permutações dos $n-1$ inteiros restantes. Se (3.96) vale para $n-1$, obtemos,

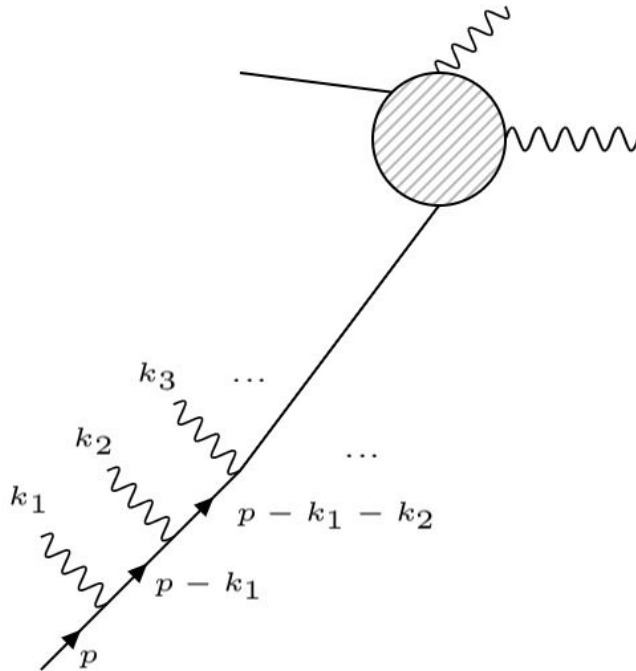
$$\text{LHS} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_{i-1}} \frac{1}{p \cdot k_{i+1}} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n}. \quad (3.98)$$

Assim, aplicando (3.96) a (3.95), encontramos

$$\begin{aligned} & \text{Diagrama: Um círculo hachurado com uma linha de elétron inicial entrando de cima à esquerda, uma linha de elétron final saindo de cima à direita, e n linhas de fóton (ondas) saindo de baixo à esquerda, rotetadas k_1, \dots, k_n .} \\ & = \bar{u}(p') \left(e \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} \right) \left(e \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} \right) \cdots \left(e \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde o círculo denota a soma sobre todas as possíveis ordens de inserção das n linhas de fóton.

Fazendo um procedimento semelhante, simplificamos a soma sobre inserções de fótons suaves na linha de elétron inicial [1]. Entretanto, nesse caso os momentos dos propagadores são $p - k_1$, $p - k_1 - k_2$ e, portanto,



Assim, surge um sinal de menos extra no fator para cada fóton, pois $(p - \sum k)^2 - m^2 \approx -2 \cdot \sum k$.

Agora, consideremos diagramas contendo n fótons suaves, conectados em quaisquer ordens possíveis às linhas do elétron inicial e final. A soma sobre todos os diagramas pode ser escrita tal como

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') i\mathcal{M}_{\text{duro}} u(p) \cdot e \left(\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} \right) \cdot e \left(\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{p \cdot k_2} \right) \\ \dots e \left(\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n} \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Dessa maneira, obtemos os termos corretos para cada forma possível de dividir os n fótons entre as duas linhas multiplicando todos os fatores.

Para estabelecer quais fótons são reais ou virtuais, vamos fazer algumas considerações. Podemos fazer um fóton virtual pegando dois momentos de fóton k_i e k_j e fazendo $k_j = -k_i \equiv k$, multiplicando pelo propagador do fóton e integrando sobre k . Para cada fóton virtual, obtemos a expressão [1],

$$\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(\frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right) \cdot \left(\frac{p'}{-p' \cdot k} - \frac{p}{-p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{X}, \quad (3.101)$$

ressaltando que o fator $1/2$ foi inserido para eliminar a dupla contagem dos diagramas de Feynman, já que trocando k_i e k_j entre si dá o mesmo diagrama.

Para avaliar esta integral, devemos notar que esse esquema de aproximação atribui ao diagrama de um loop e sem fótons externos o valor

$$\bar{u}(p') \left(i\mathcal{M}_{\text{duro}} \right) u(p) \cdot \mathbf{X}.$$

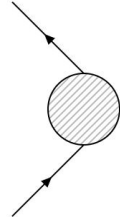
Por conseguinte, \mathbf{X} deve ser precisamente o limite infravermelho da correção de um loop ao fator de forma, ou seja,

$$\mathbf{X} = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (3.102)$$

Neste ponto, cabe fazer algumas observações. A expressão (3.102), obtida em procedimentos anteriores, foi obtida somente quando fizemos a subtração em $q^2 = 0$, de modo que (3.102) deve ser consistente com a subtração correspondente do diagrama de enésima ordem. Além disso, há diagramas que estão sendo somados que possuem correções de pernas externas; porém, essas considerações não influenciam a resposta final e, portanto, não serão comentadas neste momento.

Considerando ainda que, se existem m fótons virtuais, teremos m fatores (3.102) e, ainda, um fator de simetria adicional de $1/m!$. Somando sobre m para obter a correção

completa devida à presença de vários fótons virtuais suaves, obtemos



$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^m}{m!} = \bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{\text{duro}})u(p) \exp(\mathbf{X}) \quad (3.103)$$

Se também ocorre emissão de fótons reais, devemos multiplicar pelo seu vetor de polarização, somar sobre polarizações e integrar o elemento da matriz quadrada sobre o espaço de fase do fóton. Assim, obtemos um fator adicional na seção de choque

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^2 (-g_{\mu\nu}) \left(\frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \left(\frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{Y}. \quad (3.104)$$

Ao assumir que a energia do fóton é maior que μ e menor que E_l , que corresponde ao limite do detector, (3.102) fica

$$\mathbf{Y} = \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \log \left(\frac{E_l}{\mu} \right) = \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{E_l^2}{\mu^2} \right). \quad (3.105)$$

Novamente, se n fótons são emitidos, teremos n fatores, além do fator de simetria $1/n!$. Portanto, a seção de choque referente à emissão de qualquer quantidade de fótons virtuais é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow p' + n\gamma) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{Y}^n = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \exp(\mathbf{Y}), \quad (3.106)$$

de tal forma que, unindo as expressões para os fótons reais e virtuais, temos o resultado final da seção de choque medida, em todas as ordens de α , referente ao processo $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' +$ qualquer número de fótons com $k < E_l$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{med}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \exp(2\mathbf{X}) \times \exp(\mathbf{Y}) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \exp \left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) \right] \times \exp \left[\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{E_l^2}{\mu^2} \right) \right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \exp \left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(-\frac{q^2}{E_l^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Cabe ressaltar que o fator de correção depende da sensibilidade do detector E_l , sendo independente do corte infravermelho μ . Expandindo a equação até $\mathcal{O}(\alpha)$, recuperamos (3.88), com a diferença de que agora o fator de correção assume valores entre 0 e 1. Tomando o limite $-q^2 \gg m^2$, obtemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{medida}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \left| \exp \left[-\frac{\alpha}{2\pi} \log \left(-\frac{q^2}{m^2} \log \left(\frac{-q^2}{E_l^2} \right) \right) \right] \right|^2. \quad (3.108)$$

Analisando (3.108), observamos que a probabilidade do espalhamento ocorrer sem emissão de um fóton duro diminui mais rapidamente que qualquer potência de q^2 . O fator de correção exponencial é chamado fator de forma de Sudakov.

É interessante calcular a probabilidade, ainda dentro da aproximação considerada, de algum processo de espalhamento duro ser acompanhado pela produção de n fótons suaves, com energias entre E_- e E_+ .

A integral no espaço de fase desses fótons dá $\log(E_+/E_-)$, ao invés de $\log(E_l/\mu)$. Se a parte dura do espalhamento corresponde aos fótons com energia superior a E_+ , a seção de choque é igual a (3.107), multiplicada pelo fator

$$\begin{aligned} \text{Prob}(n\gamma \text{ com } E_- < E < E_+) &= \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{E_+^2}{E_-^2} \right) \right]^n \\ &\times \exp \left[- \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \log \left(\frac{E_+^2}{E_-^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

que é precisamente uma distribuição de Poisson

$$P(n) = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda},$$

onde

$$\lambda = \langle n \rangle = \frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{E_+}{E_-} \right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

Daqui, concluímos que esse resultado corresponde exatamente a (3.25), a estimativa semiclássica do número de fótons irradiados.

4 Formalização das Correções Radiativas

Apesar dos resultados consistentes obtidos no capítulo anterior, alguns pontos necessitam de uma abordagem mais aprofundada a fim de sustentar nossos passos e permitir o tratamento de uma gama maior de fenômenos.

Entre esses pontos estão a fórmula para taxa de decaimento em termos dos elementos da matriz-S, a fórmula para a matriz-S em termos dos diagramas de Feynman e a identidade de Ward. Além disso, é preciso justificar melhor a subtração feita para remover a divergência ultravioleta no diagrama de correção de vértice.

Assim, primeiramente analisaremos as singularidades presentes em diagramas de Feynman como funções analíticas dos seus momentos externos, como forma de estreitar a relação entre os diagramas e os princípios gerais da teoria quântica.

4.1 Renormalização da Intensidade do Campo

Consideremos a função de correlação de dois pontos, dada por

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \text{ ou } \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle.$$

Sua interpretação é clara quando o cenário é a teoria de campos livre: a função corresponde à amplitude de uma partícula que propaga de y a x .

Para responder a que essa quantidade corresponde para campos que interagem, vamos considerar somente campos escalares, já que resultados similares podem ser obtidos para funções de correlação de campos com spin.

Vamos inserir a identidade entre os operadores na função de correlação de dois pontos. Nesse caso,

$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|, \quad (4.1)$$

onde $|\lambda_0\rangle$ é autoestado de H com momento zero, $\mathbf{P}|\lambda_0\rangle = 0$, todos os boosts de $|\lambda_0\rangle$ também são autoestados de H e esses têm todos os 3-momentos possíveis. Além disso, $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ é o boost de $|\lambda_0\rangle$ com momento \mathbf{p} e $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ são relativisticamente normalizados. Ainda, $E_{\mathbf{p}}(\lambda) \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_{\lambda}^2}$, com m_{λ} igual à "massa" dos estados $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$, ou seja, a energia do estado $|\lambda_0\rangle$. A soma ocorre sobre todos os estados $|\lambda_0\rangle$ de momento zero.

Assumindo que $x^0 > y^0$, vamos desprezar o termo constante $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle$, já que é zero, geralmente, por simetria. Então,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_l \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{p}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}} | \phi(y) | \Omega \rangle. \quad (4.2)$$

Os elementos de matriz podem ser manipulados segundo [1],

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{p}} \rangle &= \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | \lambda_{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_{\mathbf{p}} \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_p} \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_p}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Integrando (4.3) sobre p^0 , a função de correlação de dois pontos torna-se

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (4.4)$$

onde é possível verificar o surgimento do propagador de Feynman $D_F(x-y)$ com $m = m_{\lambda}$.

No caso de $y^0 > x^0$, obteríamos expressão similar. Resumindo os dois casos, a função de correlação de dois pontos pode ser representada pela chamada *representação espectral de Källén-Lehmann*,

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y; M^2), \quad (4.5)$$

onde a função de densidade espectral é

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (4.6)$$

Os estados de uma partícula contribuem para a densidade espectral com uma função delta isolada,

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{nada até } M^2 \gtrsim (2m)^2) \quad (4.7)$$

onde Z é um número dado pelo elemento da matriz quadrada em (4.6) e recebe o nome de renormalização da intensidade do campo. A quantidade m é a massa exata de uma única partícula, ou seja, o autovalor de energia exato em repouso. Porém, cabe ressaltar que a massa que aparece na Lagrangeana (massa nua, que denotaremos m_0), em geral, difere do parâmetro de massa m , a massa física do bóson ϕ . Somente a massa física pode ser observada diretamente.

Considerando (4.5), a decomposição espectral gera a seguinte forma para a transformada de Fourier da função de dois pontos

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (4.8)$$

O primeiro termo dessa função contém um pólo simples em $p^2 = m^2$, enquanto o segundo contribui com um *branch cut* que começa em $p^2 = (2m)^2$. Se existem quaisquer estados ligados de duas partículas, elas aparecerão como deltas adicionais em $\rho(M^2)$ e, consequentemente, como pólos adicionais abaixo do corte.

É interessante fazer uma comparação com o resultado da teoria livre, tal seja

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.9)$$

Em primeiro lugar, observamos que (4.8) contém o fator de renormalização da intensidade do campo $Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2$, a probabilidade de $\phi(0)$ criar um dado estado a partir do vácuo. Por outro lado, (4.9) possui este fator de forma implícita, já que $\langle p | \phi(0) | 0 \rangle = 1$ na teoria de campos livres. Ainda, a expressão relativa ao caso com interação contém contribuições de estados intermediários de multipartículas com um espectro de massa contínuo. Na teoria de campos livre, $\phi(0)$ pode criar somente uma única partícula do vácuo. Assim, vemos que (4.8) é uma generalização direta de (4.9).

Agora, vamos estender o resultado da função de dois pontos para campos com spin maiores¹. O problema maior consiste no fato de que o campo, neste caso, possui lei de transformação não trivial sob boosts. Em geral, diversas funções espectrais invariantes são necessárias para representar estados de multipartículas. Entretanto, esse requisito não afeta o resultado maior de que um pólo em p^2 pode surgir somente da contribuição de uma partícula única criada pelo operador do campo. Como exemplo, temos a função de dois pontos para campos de Dirac,

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle &= \frac{iZ_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{iZ_2(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots, \end{aligned} \quad (4.10)$$

cujos termos omitidos dão o *branch cut* proveniente das multipartículas. A constante Z_2 corresponde à probabilidade do campo quântico criar ou aniquilar um exato autoestado de uma partícula de H , como no caso escalar,

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p). \quad (4.11)$$

¹ Campos sem massa com spin maior que dois.

No pólo, (4.10) é igual àquela de um campo livre com massa física, com exceção do fator de redimensionamento Z_2 .

Um exemplo interessante que permitirá que nossas discussões estejam melhor fundamentadas é a autoenergia do elétron. Em termos de diagramas, a função de dois pontos do elétron é

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \dots \quad (4.12)$$

diagrama 1: uma linha horizontal com pontos x e y nos extremos.
diagrama 2: uma linha horizontal com pontos x e y nos extremos, com uma bolha de autoenergia no topo.

De acordo com as regras de Feynman, cada um dos diagramas possui em fator de $e^{ip \cdot (x-y)}$ para os pontos externos e uma integral $\int d^2p / (2\pi)^4$ sobre o momento p carregada pelos propagadores inicial e final. Vamos omitir esses termos a partir deste ponto.

O primeiro propagador é apenas o propagador de campo livre, ou seja,

$$\text{diagrama 1} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \quad (4.13)$$

lembrando que a notação m_0 é empregada para diferenciar o termo de massa da Lagrangeana da energia de repouso observável do elétron. Todavia, se pudermos aplicar expansão perturbativa, a expressão do propagador na ordem dominante deve aproximar a expressão exata. O segundo diagrama, denominado autoenergia do elétron, vale

$$\text{diagrama 2} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2}, \quad (4.14)$$

diagrama 2: uma linha horizontal com pontos p , k e p nos extremos, com uma bolha de autoenergia no topo.

no qual²,

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (4.15)$$

Vale notar que a integral Σ_2 possui em divergência infravermelha regularizada por uma massa pequena μ atribuída ao fóton. Portanto, vamos empregar as técnicas de correção de vértice vistas anteriormente para avaliar a integral.

Introduzindo um parâmetro de Feynman para combinar os dois denominadores, temos

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}, \quad (4.16)$$

² O número 2 em Σ_2 denota que esta quantidade é a contribuição de segunda ordem de uma quantidade Σ , a ser definida.

e completando os quadrados e definindo o momento $l \equiv k - xp$, obtemos, ignorando o termo linear em l do numerador,

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m_0}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}, \quad (4.17)$$

com $\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$.

Como a integral em l diverge, primeiramente devemos regularizá-la utilizando o procedimento de Pauli-Villars [8],

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (4.18)$$

e, então, performar a rotação de Wick e substituir as variáveis Euclidianas $l_E^0 = -il^0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^2} &\longrightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E^2 \left(\frac{l_E^2}{[l^2_E + \Delta]^2} - \frac{l_E^2}{[l^2_E + \Delta_\Lambda]^2} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $\Delta_\Lambda = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \longrightarrow x\Lambda^2$ ($\Lambda \longrightarrow$).

Assim, Σ_2 é igual a

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x\not{p}) \log \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2} \right). \quad (4.20)$$

Em primeiro lugar, discutiremos o comportamento analítico de Σ_2 como uma função de p^2 . Quando o argumento do logaritmo é negativo, há um *branch cut*, e para quaisquer x isso ocorre para p^2 suficientemente grande. O corte se inicia no ponto onde vale

$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0, \quad (4.21)$$

que tem como solução

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]} \end{aligned} \quad (4.22)$$

O *branch cut* de $\Sigma_2(p^2)$ se inicia no valor mínimo de p^2 tal que essa equação possui uma solução real para x entre 0 e 1, o que ocorre exatamente quando $p^2 = (m_0 + \mu)^2$, no limite para criação de um estado de duas partículas (elétron mais fóton).

Apesar de termos localizado o *branch cut* de duas partículas esperado pela representação de Källen-Lehmann, ainda não encontramos o pólo simples em $p^2 = m^2$. Para encontrá-lo, consideraremos uma série infinita de diagramas de Feynman.

Seja $-i\Sigma(p)$ a soma de todos os diagramas 1PI com duas linhas externas de férmion,

Agora, a transformada de Fourier da função de dois pontos pode ser escrita como

Aqui, observamos que o primeiro diagrama possui um pólo simples em $p^2 = m_0^2$, os diagramas da segunda classe possuem um pólo duplo também em $p^2 = m_0^2$, e assim por diante. Porém, a soma de todos esses diagramas forma uma série geométrica, de forma que podemos expressar o propagador do elétron como $i/(\not{p} - m_0)$ e essa série como

O propagador tem um pólo simples deslocado de m_0 por $\Sigma(p)$. A localização desse pólo, ou seja, a massa física m , é a solução da equação

$$[p - m_0 - \Sigma(p)]|_{p=m} = 0. \quad (4.26)$$

Devemos notar que uma contribuição positiva para Σ gera um deslocamento positivo na massa do elétron. Próximo ao pólo, o denominador de (4.25) assume a forma

$$(\not{p} - m) \cdot \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\Big|_{\not{p}=m}\right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2), \quad (4.27)$$

de maneira que o propagador do elétron completo tem um pólo de partícula única exatamente da forma (4.10), com m dado por (4.26) e

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\Big|_{\not{p}=m}. \quad (4.28)$$

Calculando explicitamente Σ_2 , encontramos as primeiras correções para m e Z_2 . Primeiramente, computaremos o resultado para m . Até ordem α , o deslocamento de massa é

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma_2(\not{p} = m) \approx \Sigma_2(\not{p} = m_0). \quad (4.29)$$

Dessarte, usando (4.20),

$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) \log \left(\frac{\Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x\mu^2} \right). \quad (4.30)$$

Observamos que o deslocamento da massa é divergente ultravioleta, com o termo divergente da forma

$$\delta m \longrightarrow \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right), \quad (\Lambda \longrightarrow \infty). \quad (4.31)$$

Neste ponto, é natural questionar quais as implicações de m e m_0 diferirem e se isso deveria ocorrer. Interpretando do ponto de vista conceitual, a massa do elétron de fato deveria ser modificada pelo seu acoplamento ao campo eletromagnético. Na eletrodinâmica clássica, a energia de repouso de qualquer carga é aumentada pela energia de seu campo eletrostático, e essa diferença de energia diverge no caso de uma carga pontual [1],

$$\int d^3r \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} = \int d^3r \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4^2} \right)^2 = \frac{\alpha}{2} \int \frac{dr}{r^2} \Lambda. \quad (4.32)$$

Porém, a divergência que discutimos anteriormente é muito fraca e logaritmica em Λ , ao invés de ser linear como em (4.32). Para justificar esse fato, vamos imaginar que a massa m_0 é fixada em 0. Assim, as duas componentes de helicidade do campo do elétron ψ_L e ψ_R não estariam acopladas por nenhum termo na hamiltoniana da eletrodinâmica quântica, o que implicaria que correções perturbativas nunca poderiam induzir acoplamento de ψ_L e ψ_R e, ainda, um termo de massa do elétron. Resumindo, a diferença de

massa δm deveria se anular quando $m_0 = 0$, de modo que δm deve ser proporcional a m_0 . Então, fazendo a análise dimensional, a dependência só pode ser logarítmica em Λ .

Retomando nosso objetivo inicial, vamos analisar a correção perturbativa de Z_2 . De (4.28), encontramos

$$\begin{aligned}\delta Z_2 &= \frac{d\Sigma_2}{d\not{p}}|_{\not{p}=m} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x \log \frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} + 2(2-x) \frac{x(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} \right],\end{aligned}\tag{4.33}$$

que também é divergente ultravioleta logaritmicamente. O ponto interessante desta equação é que ela se assemelha fortemente à subtração *ad hoc* que fizemos no cálculo da correção do vértice do elétron. Havíamos obtido que a subtração valia

$$\begin{aligned}\delta F_1(0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \left[\log \left(\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] \\ &\quad \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \left[\log \left(\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right],\end{aligned}\tag{4.34}$$

que integrando por partes dá

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz (1-2z) \log \left(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) &= - \int_0^1 dz z (1-z) \frac{2(1-z)m^2}{(1-z)^2 m^2 - \mu^2} \\ &\quad \int_0^1 dz \left[(1-z) - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - \mu^2} \right].\end{aligned}\tag{4.35}$$

Conhecendo esse resultado, é possível mostrar que $\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0$, que é uma identidade essencial na demonstração do porquê da subtração *ad hoc* feita em seções anteriores.

4.2 Fórmula de Redução LSZ

A fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik e Zimmermann) consiste em uma relação geral entre funções de correlação e elementos da matriz-S. Ela justifica, juntamente com as regras para computar funções de correlação, a fórmula para elementos da matriz-S em termos de diagramas de Feynman. Faremos uma análise a partir de campos escalares.

Vamos considerar um processo de espalhamento do tipo $2 - \text{corpos} \rightarrow n - \text{corpos}$. Para calcular o elemento de matriz desse processo, começamos com a função de correlação

de $n + 2$ campos de Heisenberg. Se fizermos a transformada de Fourier com respeito à coordenada de qualquer um dos campos, encontraremos um pólo da forma

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (p^2 \rightarrow m^2), \quad (4.36)$$

na variável da transformada de Fourier p^2 . Argumentaremos que os estados de uma partícula associados a esses pólos são, na verdade, estados assintóticos. Tomando o limite no qual $n + 2$ partículas externas vão *on-shell*, o coeficiente do pólo múltiplo pode ser interpretado como um elemento da matriz-S.

Começando com a transformada de Fourier da função de correlação de $(n+2)$ -pontos com respeito a um argumento x , devemos analisar a integral

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \} | \Omega \rangle,$$

dividindo-a em três regiões para identificar os pólos na variável p^0 ,

$$\int dx^0 = \int_{T_+}^{\infty} dx^0 + \int_{T_-}^{T_+} dx^0 + \int_{-\infty}^{T_-} dx^0, \quad (4.37)$$

onde T_+ é muito maior que todos os z_i^0 e T_- é muito menor que todos os z_i^0 . Vamos denominar cada um dos intervalos I, II e III, respectivamente. Como a região II é limitada e o integrando depende de p^0 na função analítica $\exp(ip^0 x^0)$, sua contribuição será analítica em p^0 . Contudo, como I e III são ilimitadas, podem desenvolver singularidades em p^0 .

Analisando a região I, $\phi(x)$ aparece primeiro no ordenamento temporal, já que x^0 é o tempo mais recente. Vamos inserir um conjunto completo de estados intermediários da forma,

$$\mathbf{1} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}}|, \quad (4.38)$$

que modifica a integral como

$$\begin{aligned} & \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int d^3x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{q}} \rangle \\ & \times \langle \lambda_{\mathbf{q}} | T \{ \phi(z_1) \phi(z_2) \dots \} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Usando $\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{q}} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-iq \cdot x}|_{q^0=E_{\mathbf{q}}(\lambda)}$, e incluindo um fator de $e^{-\epsilon x^0}$ para assegurar que a integral seja bem definida, ela torna-se

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} e^{ip^0 x^0} e^{-iq^0 x^0} e^{-\epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ & \times \langle \lambda_{\mathbf{q}} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\mathbf{p}}(\lambda) + i\epsilon} \langle \omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (4.41)$$

O denominador é $p^2 - m_\lambda^2$ e há uma singularidade em p^0 , que pode ser um pólo ou um *branch cut*, dependendo se a energia de repouso m_λ é isolada. O estado de uma partícula corresponde a um valor de energia isolada $p^0 = E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$, e nesse ponto (4.41) tem um polo

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle, \quad p^0 \longrightarrow +E_{\mathbf{p}}. \quad (4.42)$$

O fator \sqrt{Z} é o mesmo fator de renormalização da intensidade do campo que vimos anteriormente.

Avaliando a região III, colocamos $\phi(x)$ por último na ordem dos operadores e inserimos um conjunto completo de estados entre $T\{\phi(z_1) \dots\}$ e $\phi(x)$. Fazendo o mesmo procedimento acima, obtemos um pólo conforme p^0 tende a $-E_p$,

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | -\mathbf{p} \rangle \sqrt{Z} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad p^0 \longrightarrow -E_p. \quad (4.43)$$

Agora, devemos fazer a transformada de Fourier com respeito às coordenadas finais. Entretanto, as partículas externas não devem interferir, de maneira que devemos isolá-las de cada uma delas no espaço. Assim, repetiremos o cálculo anterior usando um pacote de onda ao invés de uma transformada de Fourier.

Começamos com a seguinte substituição na equação (4.39),

$$\int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}), \quad (4.44)$$

na qual $\varphi(\mathbf{k})$ é uma distribuição estreita com centro em $\mathbf{k} = \mathbf{p}$. Essa distribuição faz com que x esteja numa faixa cuja extensão espacial é aquela de um pacote de onda sobre a trajetória de uma partícula com momento \mathbf{p} . Após essa mudança, (4.41) tem seu lado direito com uma estrutura de singularidade mais complicada

$$\sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle, \quad p^0 \longrightarrow +E_p, \quad (4.45)$$

onde $\tilde{p} = (p_0, \mathbf{k})$. Agora, a singularidade de uma partícula é um *branch cut* cujo comprimento é a largura no espaço de momento do pacote de onda $\varphi(\mathbf{k})$. Contudo, se $\varphi(\mathbf{k})$ define o momento estreitamente, o *branch cut* é muito pequeno e (4.45) possui um limite bem definido no qual $\varphi(\mathbf{k})$ tende a $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ e sua singularidade afila o pólo de

(4.41). Sofre a mesma modificação a singularidade devido aos estados de partícula única em (4.43).

Neste ponto, convém integrar cada uma das coordenadas na função de correlação de $(n+2)$ pontos contra um pacote de onda, a fim de obter

$$\left(\prod_i \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (4.46)$$

Assim, os pacotes de onda deveriam ser escolhidos de tal forma a se sobreporem em uma região em torno de $x = 0$ e a se separarem nos passado e futuro distantes. Analisaremos a integral elegendo um tempo grande positivo T_+ tal que todos os pacotes de onda estejam bem separados para $x_i^0 > T_+$, e um tempo grande negativo T_- tal que os pacotes estejam bem separados para $x_i^0 < T_-$. Dessa forma, a integral pode ser quebrada em três regiões, como foi feito previamente. Novamente, a integral de qualquer x_i^0 sobre a região limitada Π leva a uma expressão analítica na energia correspondente p_0^i , de maneira que podemos focar no caso no qual todos os x_i^0 são colocados no passado distante ou futuro.

Consideremos, ainda, a contribuição na qual somente duas das coordenadas temporais, x_1^0 e x_2^0 , estão no futuro. Assim, os $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ ficam à esquerda dos outros campos no ordenamento temporal. Inserindo um conjunto completo de estados $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$, as integrações em (4.46) sobre as coordenadas desses dois campos assumem a forma

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (4.47)$$

O estado $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$ é aniquilado pelos dois operadores do campo restritos a existir somente em pacotes de onda distantes; portanto, deve consistir em duas excitações distintas do vácuo em duas localizações diferentes. Se as excitações estão bem separadas, devem ser independentes, permitindo a aproximação

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | \\ &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_1}} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_2}} \langle \phi(x_1) | \lambda_{q_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{q_2} \rangle \langle \lambda_{q_1} \lambda_{q_2} |. \end{aligned} \quad (4.48)$$

As somas sobre λ_1 e λ_2 correm sobre todos os estados de momento zero, mas somente estados de uma partícula contribuem para os pólos que estamos buscando. Nesse caso, as integrais sobre x_1^0 e \mathbf{q}_1 produzem uma singularidade aguda em p_1^0 da forma (4.45), e as integrais sobre x_2^0 e \mathbf{q}_2 produzem o mesmo comportamento singular em p_2^0 , [1].

Com as duas singularidades, (4.46) torna-se

$$\left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}_i) \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle,$$

e no limite onde os pacotes de onda tendem às funções delta concentradas nos momentos definidos \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , essa expressão tende a

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{fora}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle.$$

A mesma análise para os tempos x_i^0 no passado distante fornece o resultado de que o coeficiente do termo maximamente singular no p_i^0 correspondente é um elemento de matriz com um estado 'dentro'³. O termo mais singular em (4.46) é igual a, portanto,

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \left(\prod_{i=3,\dots} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{fora}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | - \mathbf{p}_3 \dots \rangle_{\text{dentro}},$$

sendo que o último fator corresponde a um elemento da matriz-S.

Apesar de termos obtido o valor de um elemento da matriz-S através do valor esperado do vácuo dos campos com pacotes de onda correspondente, extraindo as singularidades nas energias p_i^0 e tomando o limite conforme os pacotes de onda tornam-se funções delta do momento, seria interessante e mais simples partir do procedimento final para extrair as singularidades. Em outras palavras, gostaríamos de obter as singularidades repetindo nossos passos em ordem reversa.

O que se observa é que, de fato, o resultado para a singularidade dominante não é modificada pela troca da ordem das operações. De forma superficial, ocorre que na análise feita acima, novas singularidades podem surgir porque, na transformada de Fourier, x_1 e x_2 podem se aproximar no futuro distante. No entanto, nessa região o termo exponencial está próximo de $\exp[i(p_1 + p_2) \cdot x_1]$, portanto novas singularidades são pólos simples na variável $(p_1^0 + p_2^0)$, ao invés de produtos de pólos nas duas variáveis separadas de energia.

Retomando a ideia de executar as operações em ordem inversa, obtemos uma relação entre transformadas de Fourier das funções de correlação e elementos da matriz-S. Essa relação é materializada justamente na chamada fórmula de redução LSZ,

$$\begin{aligned} & \prod_l^n \int d^4 x_l e^{ip_l \cdot x_l} \prod_l^m \int d^4 y_l e^{-ik_l \cdot y_l} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle \\ & \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z} i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z} i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_m \rangle, \end{aligned} \quad (4.49)$$

³ Os estados 'dentro' e 'fora' dizem respeito a autoestados de energia-momento de hamiltonianas livres e assintóticas, associados com os estados ligados de uma teoria.

com a aproximação válida no limite em que cada $p_i^0 \rightarrow +E_{p_i}$ e cada $q_j^0 \rightarrow +E_{q_j}$.

A quantidade Z , a constante de renormalização da intensidade do campo, é distinta para cada partícula, obtida de sua respectiva função de dois pontos. Assim, a fórmula LSZ enuncia que um elemento da matriz-S pode ser computado seguindo uma série de passos: primeiramente escrevendo a transformada de Fourier da função de correlação, restringindo a atenção à região do espaço de momento onde as partículas externas estão próximas da mass shell, e também identificando o coeficiente do pólo de multipartícula. Para campos com spin, deve-se multiplicar por um spinor de polarização, como $u^s(p)$, ou vetor, como $\epsilon^r(k)$, para projetar o estado de spin desejado.

A fim de fazer melhor uso da fórmula, convém expressá-la em termos dos diagramas de Feynman. Dessarte, analisaremos a relação entre a expansão em diagramas da função de 4-pontos do campos escalar e o elemento da matriz-S para o espalhamento 2-partículas \rightarrow 2-partículas.

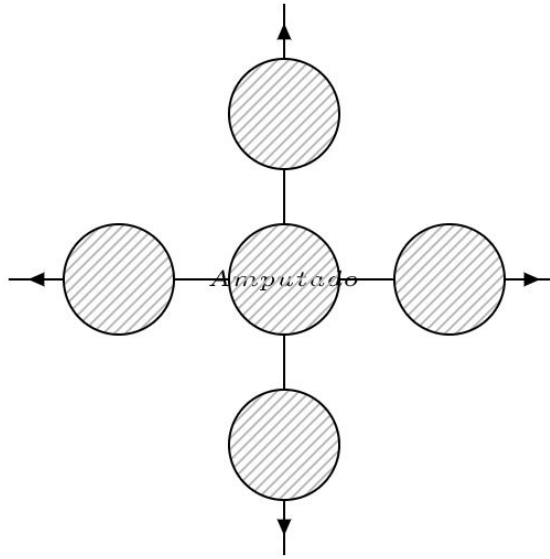


Figura 5 – Função de quatro pontos exata na teoria de campos escalar.

A função de 4-pontos (figura 5) é

$$\left(\prod_1^2 \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \right) \left(\prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-ik_i \cdot y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle.$$

Consideraremos somente os diagramas conectados, já que os desconectados não têm estrutura de singularidade, conforme nosso interesse.

Inicialmente devemos corrigir as fórmulas (3.33) e (3.35) inserindo o fator $\sqrt{Z_2}$ para os elétrons inicial e final. A equação da estrutura do vértice exato fica, então,

$$Z_2 \Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (4.56)$$

sendo $\Gamma^\mu(p', p)$ a soma dos diagramas de vértice elétron-fóton amputados. De posse da nova, equação, podemos reavaliar os fatores de forma até ordem α . Como $Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$ e F_2 se inicia na ordem α , os resultados para F_2 permanecem inalterados. Por outro lado, para computar F_1 , reescrevemos (4.56) como

$$Z_2 \Gamma^\mu = (1 + \delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \delta Z_2, \quad (4.57)$$

onde δZ_2 e $\delta \Gamma^\mu$ denotam as correções de ordem α de Z_2 e Γ^μ , respectivamente. Comparando com o lado direito de (4.56), nota-se que $F_1(q^2)$ recebe uma contribuição nova igual a δZ_2 . Usando a fórmula para $\delta F_1(q^2)$ do capítulo anterior e usando a relação $\delta Z_2 = -\delta F_1$,

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + [\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)]. \quad (4.58)$$

Já havíamos obtido essa expressão baseado no argumento do procedimento de subtração *ad hoc*. Neste ponto, é claro ver que o resultado provém da inclusão da renormalização da intensidade do campo.

Todavia, por este caminho não é claro enxergar como o cancelamento das divergências em F_1 ainda ocorre em ordens mais altas. Ainda, a verificação da relação $F_1(0) = 1$ em ordem α parece depender de uma coincidência numérica.

A solução dessa questão consiste em definir um segundo fator de re-escala Z_1 pela equação

$$\Gamma^\mu(q = 0) = Z_1^{-1} \gamma^\mu, \quad (4.59)$$

sendo Γ^μ a função do vértice amputado completa. Para encontrar a igualdade que procuramos, precisamos provar que $Z_1 = Z_2$, de forma que a re-escala do vértice compensa exatamente a renormalização da intensidade do campo. Isso será demonstrado em seções próximas.

Finalmente, vamos aplicar os tópicos discutidos até aqui em um exemplo muito pertinente: a renormalização da carga elétrica. .

4.3 Renormalização da Carga Elétrica

Antes de começar a discutir a renormalização da carga elétrica em si, iniciaremos o tratamento comentando sobre a identidade de Ward, que será necessária para a construção do resultado. De forma resumida, a identidade diz que se $\mathcal{M}(k) = \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu(k)$ é a

amplitude de algum processo da Eletrodinâmica Quântica envolvendo um fóton externo com momento k , então essa amplitude se anula quando trocamos ϵ_μ por k_μ , ou seja,

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (4.60)$$

A prova completa pode ser consultada em [1] (seção 7.4). O ponto interessante para os nossos objetivos é que esta identidade garante o cancelamento exato dos fatores de redimensionamento infinitos na amplitude de espalhamento do elétron ($Z_1 = Z_2$) que vimos anteriormente. Quando combinado com a equação dos fatores de forma do elétron,

$$Z_2 \gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (4.61)$$

a identidade garante a igualdade já conhecida $F_1(0) = 1$ em todas as ordens de perturbação.

Cabe ressaltar que é comum na literatura que alguns termos como identidade de Ward, conservação de corrente e invariância de gauge sejam utilizados como sinônimos, já que a identidade de Ward é a expressão diagramática da conservação da corrente elétrica, que é consequência da invariância de gauge.

Retomando nosso problema original, relembramos que discutimos diversos tipos de correções radiativas no processo de espalhamento do elétron a partir de um alvo pesado. Entretanto, existe um tipo de correção radiativa para esse processo que ainda não foi comentado, como aparece na figura 6.

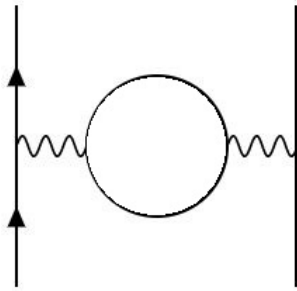


Figura 6 – Diagrama de polarização do vácuo de ordem α .

Este diagrama é o diagrama de polarização do vácuo de ordem α , também conhecido como autoenergia do fóton [9]. Do ponto de vista fenomenológico, pode ser interpretado como uma modificação na estrutura do fóton pelo par virtual elétron-pósitron. Ele altera o campo efetivo $A^\mu(x)$ visto pelo elétron espalhado, podendo deslocar a intensidade total desse campo e mudar sua dependência de x , ou ainda de q , se no espaço de Fourier.

Agora resta calcular $\Pi_2(q^2)$. De (4.62), temos

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{q} + m}{(k+q)^2 - m^2} \right] - 4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}. \quad (4.72)$$

Usamos a notação e e m porque a diferença entre e_0 e m_0 daria somente uma contribuição de ordem α^2 para $\Pi^{\mu\nu}$.

Novamente, escolhemos $l = k + xq$ como parâmetro de Feynman para combinar os fatores do denominador,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

E o numerador fica, em termos de l

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= 2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) \\ &\quad + \text{termos lineares em } l. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Fazendo a rotação de Wick e substituindo $l^0 = il_E^0$,

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}l_E^2 + g^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$. Aqui, surge um problema: a integral é divergente ultravioleta e, mesmo que fosse imposto o limite $l_E = \Lambda$, o termo dominante seria

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu},$$

sem um termo compensador $q^\mu q^\nu$. Estamos diante de uma grave violação à identidade de Ward, que daria ao fóton uma massa infinita tal que $M \propto e\Lambda$.

A solução para resgarmos a identidade de Ward consiste na aplicação de outro tipo de regularização, não nos restringindo a limitar a integral a um momento grande Λ . Quando computamos os diagramas do vértice e da autoenergia do elétron, empregamos o regularizador de Pauli-Villars. A vantagem desse regularizador em relação à fixação do corte é a preservação da relação $Z_1 = Z_2$, uma consequência da identidade de Ward. Assim, poderíamos introduzir férmions de Pauli-Villars para corrigir o problema. Como

vários conjuntos de férmions são necessários, optamos por um método mais simples denominado regularização dimensional, desenvolvida por 't Hooft e Veltman. A regularização dimensional preserva as simetrias da QED e uma grande classe de teorias mais gerais [1].

A ideia por trás da regularização dimensional consiste em escrever os diagramas de Feynman como funções analíticas da dimensionalidade d do espaço-tempo, de forma que qualquer integral de loop-momento será convergente e, portanto, a identidade de Ward pode ser provada. A expressão final para qualquer quantidade observável deve ter um limite bem definido conforme $d \rightarrow 4$.

Para mostrar o seu funcionamento, consideremos o espaço-tempo com uma dimensão temporal e $(d-1)$ dimensões espaciais. Performando a rotação de Wick nas integrais de Feynman, teremos integrais sobre um espaço Euclidiano d -dimensional. Como exemplo, usaremos

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (4.76)$$

O primeiro fator na integral contém a área de uma esfera unitária em d dimensões. Vamos calculá-la usando

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp\left(-\sum_{i=1}^d x_i^2\right) \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(d/2). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Assim, a área da esfera é igual a

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\gamma(d/2)}. \quad (4.78)$$

O segundo fator na integral (4.76) é

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl \frac{l^{d-1}}{(l^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l^2) \frac{(l^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}, \quad x = \Delta/(l^2 + \Delta). \end{aligned} \quad (4.79)$$

A integral sobre x pode ser avaliada usando a função beta

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (4.80)$$

Reunindo os fatores, o resultado da integral em d dimensões é

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}}. \quad (4.81)$$

Essa integral tem pólos isolados em $d = 4, 6, 8, \dots$ devido aos pólos da função gama $z = 0, -1, -2, \dots$. Vamos definir a quantidade $\epsilon = 4 - d$ para encontrar o comportamento próximo ao ponto $d = 4$, e utilizar a aproximação

$$\gamma(2 - \frac{d}{2}) = \gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \gamma \approx .5772. \quad (4.82)$$

Assim, a integral fica

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (4.83)$$

Quando definimos esta integral com um regularizador de Pauli-Villars, encontramos

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\log \frac{x\Lambda^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right), \quad (4.84)$$

de maneira que o pólo $1/\epsilon$ na regularização dimensional corresponde a uma divergência logarítmica na integral do momento.

Com a fórmula da regularização dimensional em mãos, vamos aplicá-la a (4.75). Os termos de l^2 no numerador dão

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1)g^{\mu\nu}l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}} (1 - \frac{d}{2})(1 - \frac{d}{2})\Gamma(1 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \cdot (-\Delta g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Nesse caso, um pólo em $d = 2$ seria esperado, devido ao fato da divergência quadrática em 4 dimensões se tornar uma divergência logarítmica em 2 dimensões. Porém, verificamos que o pólo é cancelado, de forma que a identidade de Ward está funcionando.

Analisando os outros termos em (4.75), lembrando que $\Delta = m^2 - x(1 - x)q^2$, obtemos

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2 - d/2}} \\ &\quad \times [g^{\mu\nu}(-m^2 + x(1 - x)q^2) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1 - x)q^2) - 2x(1 - x)q^\mu q^\nu] \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i\Pi_2(q^2), \end{aligned} \quad (4.86)$$

no qual

$$\begin{aligned}\Pi_2(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow 4} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma \right) \quad (\epsilon = 4 - d).\end{aligned}\tag{4.87}$$

Apesar de, com a regularização dimensional, $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ ter adquirido a forma exigida pela identidade de Ward, ainda há a divergência logarítmica.

Podemos analisar o deslocamento em ordem α da carga elétrica,

$$e^2 - e_0^2 = \delta Z_3 \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}.\tag{4.88}$$

O que pode ser percebido desta equação é que a carga nua é infinitamente maior que a medida. Porém, essa diferença não é observável; o que se observa é a dependência de q^2 da carga elétrica efetiva, que depende da diferença

$$\hat{\Pi}_2(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right).\tag{4.89}$$

Observe que essa diferença não depende de ϵ no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Concluindo os cálculos, resta interpretar a quantidade Π_2 e extrair as informações físicas. Para isso, primeiramente vamos considerar a estrutura analítica de $\hat{\Pi}_2(q^2)$. Quando $q^2 < 0$ (propagador do fóton em *t-channel* ou *u-channel*), $\hat{\Pi}_2(q^2)$ é real e analítico. Por outro lado, $q^2 > 0$ para um processo *s-channel*⁴. O logaritmo possui um *branch cut* quando seu argumento se torna negativo, ou seja, quando

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0.$$

O produto $x(1-x)$ é no máximo $1/4$, então $\hat{\Pi}_2(q^2)$ possui um *branch cut* começando em $q^2 = 4m^2$, no limite da criação de um par real elétron-pósitron.

Vamos computar a parte imaginária de $\hat{\Pi}_2$ para $q^2 > 4m^2$. Para qualquer q^2 fixo, os valores de x que têm contribuição estão entre os pontos $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$, com $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$. Como $\text{Im}[\log(-X \pm i\epsilon)] = \pm\pi$, temos

$$\begin{aligned}\text{Im}[\hat{\Pi}_2(q^2 \pm i\epsilon)] &= -\frac{2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx x(1-x) \\ &= \mp 2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \quad (y \equiv x - \frac{1}{2}) \\ &= \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right).\end{aligned}\tag{4.90}$$

⁴ Lembrando que esses termos dizem respeito às variáveis de Mandelstam.

Observamos que a dependência em q^2 é exatamente a mesma da seção de choque para a produção de uma par férmion-antiférmion, onde β é a velocidade dos férmions no referencial do centro de massa.

Analisando como $\hat{\Pi}_2(q^2)$ modifica a interação eletromagnética, no limite não relativístico devemos computar o potencial $V(r)$. Para cargas distintas, temos [1],

$$V(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2} [1 - \hat{\Pi}_2(-|\mathbf{q}|^2)]. \quad (4.91)$$

Expandindo $\hat{\Pi}$ para $|q^2| \ll m^2$, obtemos

$$V(x) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4^2}{15m^2} \delta^{(3)}(x), \quad (4.92)$$

onde o termo de correção indica que a força eletromagnética se torna muito mais intensa em distâncias menores. No átomo de hidrogênio, por exemplo, esse efeito pode ser medido. A diferença nos níveis de energia é

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(x)|^2 \cdot \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(x) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2. \quad (4.93)$$

A função de onda é diferente de zero somente para os estados de onda-s. Para o estado $2S$, a variação na energia é

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \cdot \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1.123 \times 10^{-7} eV. \quad (4.94)$$

Como a função delta que ocorre em (4.92) é somente uma aproximação, vamos reescrever a equação que a precede da forma

$$V(x) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2)] \quad (Q \equiv \mathbf{q}), \quad (4.95)$$

onde a massa μ do fóton foi inserida para regular o potencial de Coulomb. Para resolver a integral devemos puxar o contorno para cima. O pólo $Q = i\mu$ fornece a contribuição dominante, dando ao potencial de Coulomb $-\alpha/r$, mas ainda existe uma contribuição extra do *branch cut*, que se inicia em $Q = 2mi$. Como a parte real do integrando é a mesma nos dois lados do corte, a contribuição da integral vem da parte imaginária de $\hat{\Pi}_2$. Definindo $q = -iQ$, a contribuição do corte dá

$$\begin{aligned} \delta V(r) &= \frac{-e^2}{(2\pi)^2 r} \cdot 2 \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \text{Im}[\hat{\Pi}_2(q^2 - i\epsilon)] \\ &= -\frac{\alpha}{r} \frac{2}{\pi} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Quando $r \gg 1/m$, a integral é dominada por uma região onde $q \approx 2m$. Fazendo a substituição $t = q - 2m$ e aproximando o integrando nessa região, obteremos

$$\begin{aligned}\delta V(r) &= -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)r}}{2m} \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{m}} \left(\frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(t) \\ &\approx -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}},\end{aligned}\tag{4.97}$$

ou seja,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right).\tag{4.98}$$

Neste ponto, vemos que o termo de correção alcança até o comprimento de onda de Compton do elétron, $1/m$. A correção radiativa de $V(r)$ é chamada de potencial de Uehling.

Essa correção pode ser interpretada da seguinte forma: em $r \gtrsim 1/m$, pares virtuais e^+e^- tornam o vácuo um meio dielétrico onde a carga aparente é menor que a carga verdadeira. Quando as distâncias são menores, cruzamos a nuvem de polarização e vemos a carga nua. A esse fenômeno dá-se o nome de polarização do vácuo.

Do contrário, podemos considerar o limite de baixas distâncias ($-q^2 \gg m^2$), no qual (4.89) fica

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2(q^2) &\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \log(x(1-x)) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right).\end{aligned}\tag{4.99}$$

Assim, a constante de acoplamento efetiva, nesse limite, é

$$\alpha_{\text{efetiva}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log\left(\frac{-q^2}{Am^2}\right)}, \quad A = \exp 5/3.\tag{4.100}$$

A carga elétrica efetiva torna-se muito maior em distância pequenas, conforme invadimos a nuvem virtual de pares elétron-pósitron.

Assim, a união dos efeitos da polarização de vácuo do elétron e dos efeitos provenientes de léptons e quarks mais pesados provoca um aumento de aproximadamente 5% de $\alpha_{\text{efetiva}}(q^2)$ de $q = 0$ a $q = 30 \text{ GeV}$, o que de fato é observado em experimentos de altas energias.

Conclusão

Inicialmente, avaliamos um *bremsstrahlung* suave com o objetivo de comparar os resultados clássico e quântico do número de fótons irradiados no processo, esperando que o resultado clássico surgisse como limite do caso quântico. Assim, com a introdução das correções radiativas, foi possível observar que, de fato, esses resultados coincidem, como esperado.

Ainda, expondo alguns métodos como os parâmetros de Feynman, corrigimos o vértice de 1-loop do elétron, encontrando a correção para o fator-g do elétron, muito próximo do valor obtido experimentalmente.

Por fim, introduzindo o problema de renormalização da carga elétrica, abordamos o procedimento de regularização de Pauli-Villars e a regularização dimensional, baseada na ideia de escrever os diagramas de Feynman como funções analíticas da dimensão do espaço-tempo, visando a convergência das integrais de loop-momento e a satisfação da identidade de Ward.

Dessa forma, foi possível evidenciar a confiabilidade da eletrodinâmica quântica e verificar que, mesmo com os aparentes problemas inerentes à sua construção, é uma teoria muito bem sedimentada e que reproduz com excelente precisão os resultados obtidos experimentalmente.

Referências

- 1 Peskin, Michael E., and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boulder, CO., 1995.
- 2 Mandl, Franz, and Graham Shaw. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- 3 Aitchison, Ian JR, and Anthony JG Hey. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. Vol. 1. CRC Press, 2012.
- 4 McMahon, David. *Quantum Field Theory Demystified*. Vol. 107. McGraw-Hill, 2008.
- 5 Feynman, Richard Phillips. *QED: The strange theory of light and matter*. Princeton University Press, 2006.
- 6 Itzykson, Claude, and Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.
- 7 Feynman, Richard P. *Quantum electrodynamics*. CRC Press, 2018.
- 8 Pauli, Wolfgang, and Felix Villars. *On the invariant regularization in relativistic quantum theory*. Reviews of Modern Physics 21.3 (1949): 434.
- 9 Weisskopf, Victor F. *On the self-energy and the electromagnetic field of the electron*. Physical Review 56.1 (1939): 72.
- 10 Schwinger, Julian. *On gauge invariance and vacuum polarization*. Physical Review 82.5 (1951): 664.